21. Valós analízis gyakorlat, 2023. december 4. 16^{05}–17^{39}

Lagrange-maradéktagos Taylor-formula:

$$\forall x \in K \quad \exists \xi \in (a,x) \quad f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Cauchy-maradéktagos Taylor-formula:

$$\forall x \in K \quad \exists \xi \in (a,x) \quad f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^{n}$$

21.1. Írjuk fel az e^x függvény grafikonjához az $(1, e)$ pontban húzott érintő egyenletét.

21.2. Állapítsuk meg a második derivált kiszámításával, hogy a következő függvényeknek milyen szélsőértékük van a megadott helyeken.

$$(a) \quad f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x = \pm 1; \qquad (b) \quad f(x) = x^3 - x, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

21.3. (a) Igaz-e, hogy ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvények, akkor $f \circ g$ is konvex?
(b) És ha még azt is kikötjük, hogy ....?

21.4. Mi az n-edik Taylor-polinom deriváltja?

21.5. (a) Írjuk fel a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ függvény 0 körüli Taylor-sorát.
(b) A Lagrange- més a Cauchy-maradéktag segítségével keressünk olyan intervallumot, ahol a Taylor-sor konvergens, és előállítja a függvényt.

Házi feladatok

21.6. Az $y = 1/x$ függvény grafikonjához húzzunk érintőt. Mekora területű háromszöget zár be az érintő a koordináta-tengelyekkel?

21.7. Állapítsuk meg a második derivált kiszámításával, hogy a következő függvényeknek milyen szélsőértékük van a megadott helyeken.

$$(a) \quad f(x) = \frac{2x + \frac{1}{x^2}}{3}, \quad x = 1; \qquad (b) \quad f(x) = x^4, \quad x = 0$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható dec. 15-ig

PM21. Igazoljuk, hogy ha f konvex egy I intervalumon, akkor van olyan $a \in I$ pont, ahol f jobboldali deriváltja differenciálható.