22. Valós analízis gyakorlat, 2023. december 5. 16^{05}–17^{39}

22.1. Legyen

$$f(x)=\begin{cases} e^{1/x^2} & \text{ha } x\neq 0,\\ 0 & \text{ha } x=0.\end{cases}$$

Igazoljuk, hogy bármely k pozitív egészhez van olyan $R_k(x)$ racionális törtfüggvény, amelyre

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases} R_k(x)e^{1/x^2} & \text{ha } x\neq 0,\\ 0 & \text{ha } x=0.\end{cases}$$

22.2. Tegyük fel, hogy $f : R \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és $f' = f$. Mutassuk meg, hogy a $C(x) = f(x)e^{-x}$ függvény konstans, vagyis $f(x) = Ce^x$.

22.3. Egy radioaktív izotóp mennyisége az $f'(t) = -a \cdot f(t)$ differenciálegyenlet szerint csökken. Mennyi a felezési ideje?

22.4. Egy henger alakú, $A = 1000\,\mathrm{cm}^2$ alapterületű tartályban víz van, a víz magassága a t pillanatban $h(t)$. A tartály alja lyukas, a lyuk keresztmetszete $A_0 = 1\,\mathrm{cm}^2$, ezen keresztül a víz $\sqrt{2gh(t)}$ sebességgel folyik ki. mennyi idő alatt folyik ki a víz fele?

Házi feladatok

22.5. Egy pontszerű test harmonikus rezgőmozgást végez az $f''(t) = -f(t)$ differenciálegyenlet szerint. Mutassuk meg, hogy az $E(t) = \frac{1}{2}(f^2 + (f')^2)$ függvény állandó.

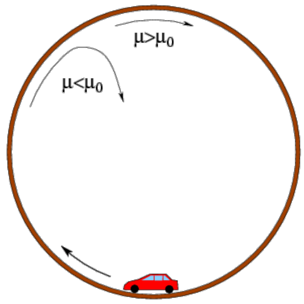
22.6. Egy kellemes októberi napon Serbán Lajkó hőlégballonnal indul a sztratoszférába. A külső hőmérséklet $T_k = 300$ K. A ballonban $V = 3000$ m^3, kezdetben $T(0) = 350$ K hőmérsékletű levegő van, de ez a $T'(t) = -10^{-3}(T(t) - T_k)$ egyenlet szerint folyamatosan hűl. A külső levegő sűrűsége $\varrho = 1$ kg/m^3, a hőlégballon tömege Lajkóval együtt $m = 200$ kg. A hőlégballon emelkedési sebességét közelítőleg a $\alpha v = \left(\dfrac{T-T_k}{T_k}\varrho \cdot V - m\right)\cdot g$ képlet írja le, $\alpha \approx 1000\,\mathrm{Ns/m}$, $g \approx 10$ m/s^2.

Milyen magasra juthat Lajkó, ha nem melegíti gázlánggal a ballont, és ballasztsúlyokat sem dob ki a barátságos Vörös Hadsereg szórakoztatására?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható dec. 22-ig

PM22. *Kinyi Rakanyar*, aki Evel Knievel, Niki Lauda és Bernard Ecclestone közös ük-ükunokája, autós cirkuszokban lép fel. Mostanában egy új mutatványt tervez: versenyautójával egy henger alakú hurkon szeretne körbemenni úgy, hogy a hurok felső felében az autó fejjel lefelé halad.



Az autó a henger aljáról, álló helyzetből indul. A mutatvány közben a vezető mindig olyan nagy gázt ad, hogy a kerekek még éppen ne csússzanak meg. (Könnyű dolga van, mert az autó négykerék-meghajtásos, tetszőlegesen nagy nyomaték leadására képes, és ideális kipörgésgátlóval is fel van szerelve; Kinyinek csupán folyamatosan a padlóig kell nyomnia a gázpedált.)

Kinyi mutatványa akkor sikerülhet, ha a gumijai elég jól tapadnak az úthoz. Ha az út és a kerekek közötti tapadási súrlódási együttható túl kicsi – kisebb, mint egy bizonyos μ_0 érték –, akkor az autó leesik. Ha a súrlódási együttható elegendően nagy – nagyobb μ_0-nál –, akkor az autó sebessége elég nagy lesz ahhoz, hogy átjusson a felső holtponton.

Kinyi fizikatanára kiszámította, hogy mi μ_0 értéke, de pedagógiai okokból nem árulta el. Csupán annyit mondott, hogy nem függ sem az autó tömegétől, sem a pálya sugarától, de még a nehézségi gyorsulástól sem.

Segíts Kinyinek! Mi μ_0 értéke három tizedesjegyre kerekítve?