Komplex Függvénytan

Kós Géza

2024

1. Komplex számok

Komplex számok. Komplex sík. A komplex sík geometriai transzformációi. Határtérték és folytonosság. Riemann-gömb. Végtelen határérték és határérték ∞-ben.

Ismétlés

Ezeket mind tudjuk algebrából, geometriából, esetleg középiskolai versenyekről:

- A komplex számokat úgy kapjuk, hogy a valós számok algebrai testét bővítjük i-vel, ami az $x^2 = -1$ egyenlet gyöke, vagyis $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
- A z komplex szám *algebrai alakja* $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$.
    - $x = \operatorname{Re} z$ a z *valós része*;
    - $y = \operatorname{Im} z$ a z *képzetes része*.
    - Alternatív jelölések: $x = \Re z$ és $y = \Im z$.
    - Figyeljük meg, hogy az i nem része a képzetes résznek; a képzetes rész is egy valós szám. Például $\operatorname{Re}(2 + 3i) = 2$, $\operatorname{Im}(2 + 3i) = 3$.
- A két valós koordináta miatt a komplex számokat a sík ($\mathbb{R}^2$) pontjaival (vektoraival) azonosítjuk: az $x + yi$ komplex szám az (x, y) pontnak (vektornak) felel meg.
- Az x, y betűket szeretjük fenntartani a valós és képzetes résznek. Ezért komplex számok jelölésére inkább más betűket fogunk használni: leggyakrabban a z-t, de előfordul w, ζ (zéta), ω (omega), s is.
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a z *abszolút értéke* vagy *hossza*; $|z|^2 = z\overline{z}$.
- Az összeadás és a kivonás ugyanaz, mint $\mathbb{R}^2$-beli (sík)vektoroknál:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

- Szorzás: a zárójeleket felbontva, és beírva, hogy $i^2 = -1$,

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

- $\overline{z} = x - yi$ a z *komplex konjugáltja*.
- Osztás: ha az algebrai alakkal számolunk, akkor érdemes a nevező konjugáltjával bővíteni:

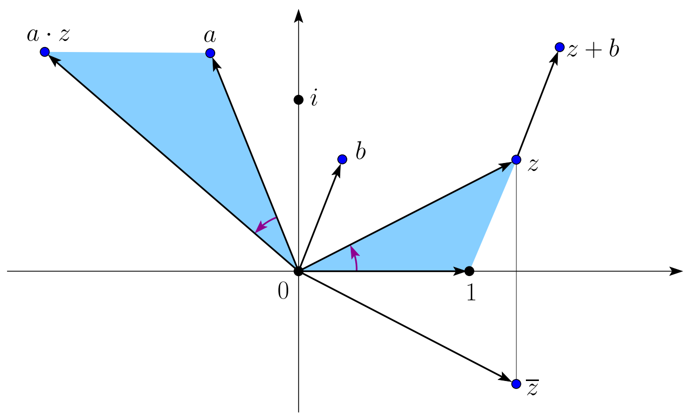
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

- Ezekkel a műveletekkel a komplex számok algebrai testet alkotnak.
- $z \neq 0$ komplex szám *trigonometrikus (polárkoordinátás) alakja* $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, ahol $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ a z *argumentuma*.
- Az argumentum csak modulo 2π egyértelmű; úgy is mondhatjuk, hogy a $(\mathbb{R}, +)/2\pi\mathbb{Z}$ faktorcsoportnak eleme.

- A trigonometrikus alakkal szép a szorzás, az osztás, az egész kitevős hatványozás és a gyökvonás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor
  - $z_1z_1 = r_2r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$, tehát az abszolút értékek összeszorzódnak és az argumentumok összeadódnak: $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ és $\arg(z_1z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$;
  - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big)$,
    $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ és $\arg\dfrac{z_1}{z_2} \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$;
  - $\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
  - Az $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ számnak n darab n-edik gyöke van:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right)$$

Hasonlósági transzformációk

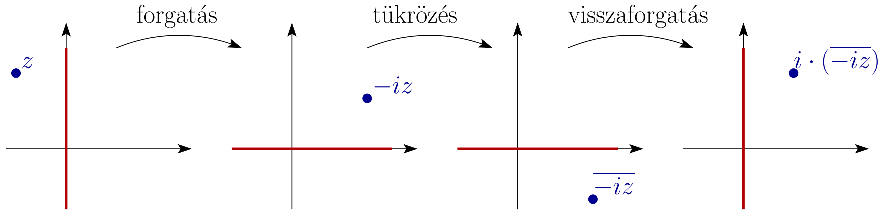


- $z \mapsto z + b$: eltolás a b vektorral
- $z \mapsto \overline{z}$: tükrözés a valós tengelyre
- $z \mapsto -z$: középpontos tükrözés a 0-ra
- $z \mapsto a\cdot z$ (valamilyen rögzített $a \neq 0$ komplex számmal): forgatva nyújtás a 0 körül; a nagyítás aránya $|a|$, a forgatás irányított szöge $\arg a$.
- ilyenek kombinációiként a következő függvényeket kapjuk meg:
  - $z \mapsto a\cdot z + b$ (az összes irányítástartó hasonlósági transzformáció)
  - $z \mapsto a\cdot \overline{z} + b$ (az összes irányításváltó hasonlósági transzformáció)

Példa

Írjuk fel képlettel a képzetes tengelyre való tükrözést.

1. megoldás: A képzetes tengelyt a valós tengelyre forgatjuk, tükrözünk, visszaforgatunk:



$$z \quad \mapsto \quad -i\cdot z \quad \mapsto \quad \overline{-i\cdot z} \quad \mapsto \quad i\cdot\left(\overline{-i\cdot z}\right) = -\overline{z}.$$

2. megoldás: A tengelyes tükrözés egy irányításváltó hasonlóság is, ezért a képletet $f(z) = a\overline{z} + b$ alakban keressük. Két pont képe meghatározza a, b-t.

Pl. $f(0) = 0$, $f(1) = -1$. Megoldva $a = -1$, $b = 0$, tehát $f(z) = -\overline{z}$.

Határérték és folytonosság

A távolság, pontok környezetei, nyílt és zárt halmazok, kompaktság, ponthalmazok összefüggősége, számsorozatok és számsorok konvergencája, függvények (véges pontban vett véges) határértéke, függvények folytonossága és egyenletes folytonossága, függvénysorozatok és függvénysorok pontonkénti és egyenletes konvergenciája, és ezek alapvető tulajdonságai pontosan ugyanazok, mint az $\mathbb{R}^2$ euklideszi síkon. Ezekhez a fogalmakhoz ugyanis nincs szükség a komplex számok szorzására, csak vektorok összeadására és abszolút értékére. A többváltozós analízisben tanult definíciók, tételek és bizonyítások változtatás nélkül átírhatók komplex változós, komplex értékű függvényekre.

Definíció

- z_0 középpontú *nyílt gömb*: $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$
- z_0 középpontú *zárt gömb*: $\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$
- *egységkör*: $\mathbb{D} = B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
- *zárt egységkör*: $\overline{\mathbb{D}} = \overline{B}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$
- *egységkörvonal*: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- a $D \subset \mathbb{C}$ halmaz *nyílt*, ha minden $z_0 \in D$ hez van olyan $\delta > 0$, melyre $B(z_0, \delta) \subset D$
- a $D \subset \mathbb{C}$ halmaz *zárt*, ha komplementere nyílt.
- a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz *összefüggő*, ha
  - D bármely két pontja összeköthető D-ben töröttvonallal;
  - D nem bontható fel két nemüres, diszjunkt nyílt halmaz uniójára, vagyis tetszőleges G_1, G_2 diszjunkt nyílt halmazokra, ha $D = G_1 \cup G_2$, akkor $G_1 = \varnothing$ vagy $G_2 = \varnothing$.
- *tartomány*: nemüres, összefüggő, nyílt része $\mathbb{C}$-nek
- *(egyváltozós) komplex függvény*: $\mathbb{C}$ egy részhalmazáról képez $\mathbb{C}$-be

Egyenletes konvergencia

Szükségünk lesz a függvénysorozatok és függvénysorok egyenletes konvergenciájára. Ez a definíció pontosan ugyanaz, mint valós függvények esetében.

Érdemes kimondani a függvénysorok egyenletes konvergenciájára vonatkozó *Weierstrass-kritérium*ot, ezt többször fogjuk használni komplex függvénysorokra:

Tétel (Weierstrass-kritérium, Weierstrass M-teszt)

Tegyük fel, hogy

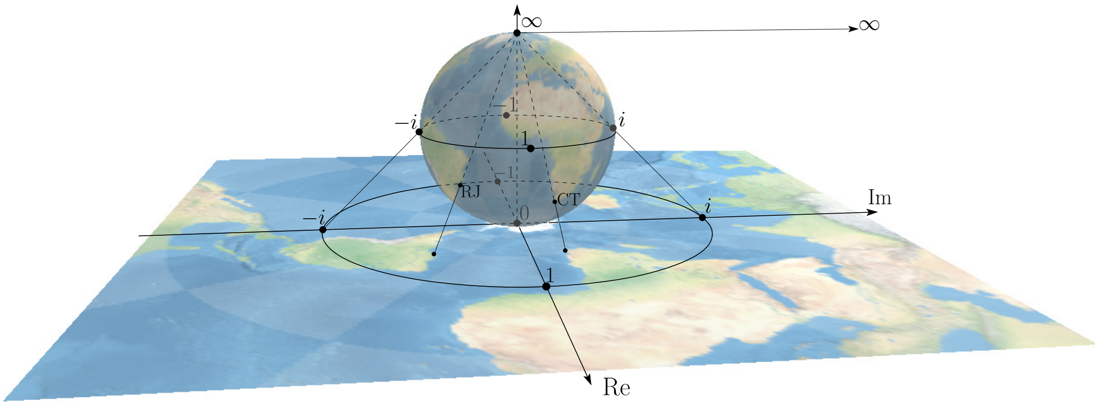
- A tetszőleges halmaz, és $f_0(z), f_1(z), \dots\ A \to \mathbb{C}$ függvények egy sorozata;
- $M_0, M_1, \dots$ nemnegatív valós számokból álló sorozat, amelyre bármely $n \in \mathbb{N}$ és $z \in A$ esetén $\left|f_n(z)\right| \leqslant M_n$, vagyis a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ függvénysornak az $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ sor egyenletes majoránsa;
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergens (véges).

Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ függvénysor abszolút és egyenletesen konvergens az A halmazon.

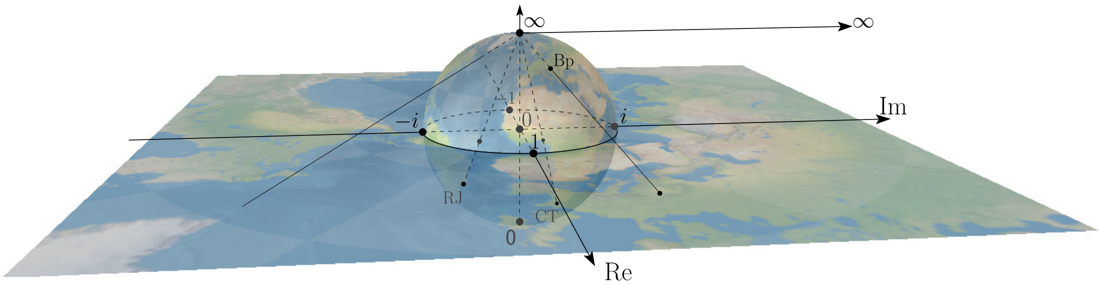
Riemann-gömb; végtelen határértékek

A valós számegyenessel és a projektív síkkal ellentétben nem definiálunk a különböző irányokhoz különböző végtelen távoli pontokat; nem lesz külön $+\infty$, $-\infty$, $i\infty$. Ehelyett egyetlen, közös végtelen távoli ponttal egészítjük ki a komplex síkot, a pont neve természetesen ∞ lesz.

A ∞-nel kiegészített komplex síkot azonosíthatjuk a gömbfelülettel egy jól ismert térbeli vetítés, a *sztereografikus projekció* segítségével. Az alábbi ábrán a földgömböt az Északi-sarkból vetítjük a Déli-sarkon át fektetett érintősíkra. Ha a gömb átmérőjét egységnyinek választjuk, akkor az egyenlítő pontjait éppen az egységnyi abszolút értékű komplex számoknak feleltetjük meg.



Ugyanezt a megfeleltetést kapjuk, ha a gömb sugara egységnyi, és az egyenlítő síkjára vetítünk (a kétféle vetítés között egy egyszerű középpontos nagyítás a kapcsolat):

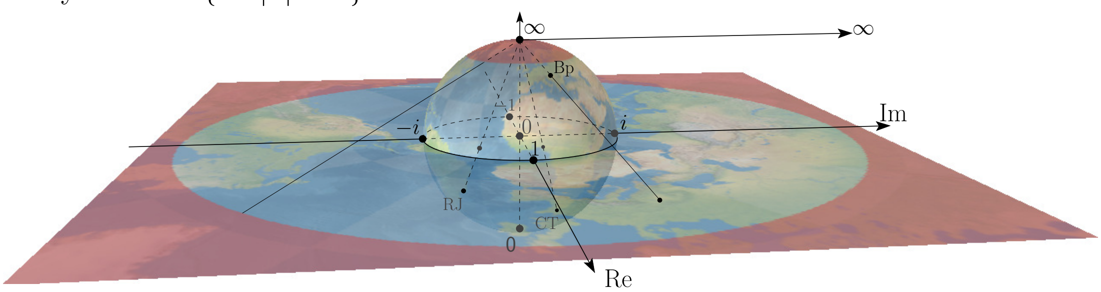


Az Északi-sarkot nem feleltettük meg egyetlen komplex számnak sem; az Északi-sark felel meg a végtelennek. Minél nagyobb abszolút értékű komplex számot vetítünk vissza gömbre, a vetítő egyenes annál kisebb szöget zár be a síkkal; a határesetekben, amikor úgy képzeljük el, hogy a vetített komplex szám valamilyen irányban "kimegy a végtelenbe", a vetítő egyenes érinti a gömböt az Északi-sarkban.

Az ilyen módon, a komplex számokkal és a ∞-nel megszámozott gömbfelület a *Riemann-gömb*.

A végtelen környezetei

Ha az Északi-sark egy környezetét (gömbsüveget) vetítjük a síkra, egy kör külsejét kapjuk. Ezért a ∞ gömbi környezetei az $\{z : |z| > r\}$ alakú halmazok.



A ∞-nek nincs előjele vagy iránya, $z \to \infty$ és $|z| \to \infty$ ugyanazt jelenti. Ezért semmi akadálya, hogy az 1/0 alakú határértékeket is értelmezzük.

- $\frac{1}{0} = \infty$. (Valósban két különböző féloldali határérték lenne.)
- $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = a$ akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = a$
- $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$ stb.

2. Komplex differenciálhatóság

Komplex differenciálhatóság, geometriai jelentés. Differenciálási szabályok. Az inverzfüggvény differenciálási szabálya.

Cauchy–Riemann-egyenletek.

Holomorf függvény és egészfüggvény fogalma.

A valós egyváltozós differenciálás definícióját betűről betűre átírhatjuk:

Definíció

Tegyük fel, hogy $f(z)$ komplex függvény, $a \in \operatorname{int} D(f)$.

Az $f(z)$ függvény *differenciálható* az $a \in \mathbb{C}$ pontban, ha $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ létezik és véges; a jele $f'(a)$.

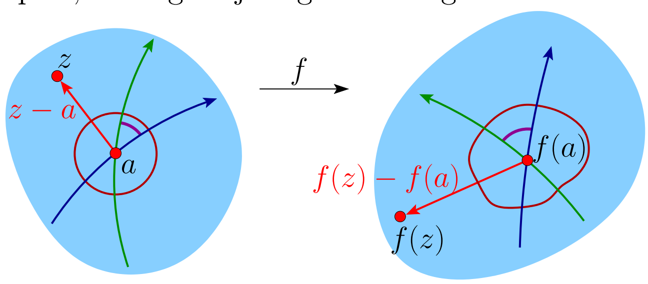
A szokásos ekvivalens átírások, amikor az a pont közelében az $f(z)$ függvényt egy lineáris függvénnyel közelítjük:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)-f'(a)\cdot(z-a)}{|z-a|} = 0;$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + f'(a)\cdot(z-a) + \varepsilon(z)\cdot(z-a) \quad \text{vagy} \\ f(z) &= f(a) + f'(a)\cdot(z-a) + \varepsilon(z)\cdot|z-a|, \end{aligned}$$

ahol $\lim\limits_{z\to a} \varepsilon = 0$, illetve $\varepsilon(z)$ folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0$.

Érdemes elgonodolkodni az átfogalmazások geometriai jelentésén. Ha az $f'(a)$ derivált érték nem 0, akkor az $z \mapsto f'(a)\cdot z$ transzformáció egy forgatva nyújtás. A $z \mapsto f(a) + f'(a)(z-a)$ lineáris függvény egy irányítástartó hasonlósági transzformáció. Ez az a pont egy kis környezetét az $f(a)$ pont egy környezébe képezi; az a középpontú köröket $f(a)$ közepű körökbe, az a-n átmenő görbéket $f(a)$-n átmenő görbékbe képezi, és megtartja a görbék szögét is.



$$f(z) - f(a) = \underbrace{f'(a)\cdot(z-a)}_{\text{forgatva nyújtás}} + \underbrace{\varepsilon(z)\cdot|z-a|}_{\text{hibatag (zaj)}}$$

Az $f(a) + f'(a)\cdot(z-a)$ lineáris függvény persze csak közelíti az $f(z)$-t, de mivel $\varepsilon(z)$ az a pontban 0-hoz tart, a közelítés egyre pontosabb lesz, a hibatag még $|z-a|$-val osztva is 0-hoz tart. Ezért, továbbra is feltéve, hogy $f'(a) \neq 0$,

- az a pontban szögtartó (a szögek irányítását is megtartja);
- az a közepű kicsi körök képe közelítőleg arányosan kicsi körök. (Arra nincs garancia, hogy a kör képe folytonos görbe, csak ha azt is feltételezzük, hogy a függvényünk az a pont egy környezetében folytonos.)

Ha $f'(a) = 0$, akkor a lineáris közelítésünk egy konstans függvény, és egyelőre semmit sem tudunk mondani arról, hogy mi történik a szögekkel, vagy milyenek a kicsi körök képei azon kívül, hogy *kicsik*.

Differenciálási szabályok

Az egyváltozós valós függvények differenciálási szabályai és ezek bizonyításai változtatás nélkül átírhatók komplex függvényekre.

Tétel

Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos a-ban.

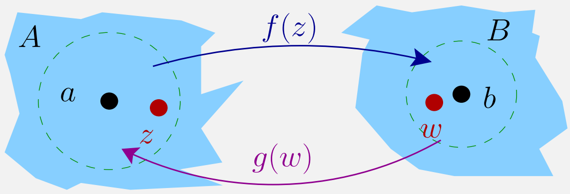
Tétel (differenciálási szabályok)

- $(c)' = 0$, $(z)' = 1$, $(z^n)' = nz^{n-1}$.
- Ha f differenciálható a-ban, akkor $c \cdot f$ is differenciálható a-ban, és $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$.
- Ha f és g differenciálható a-ban, akkor $f + g$ is differenciálható a-ban, és
$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
- Ha f és g differenciálható a-ban, akkor $f \cdot g$ is differenciálható a-ban, és
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$
- Ha f és g differenciálható a-ban, és $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ is differenciálható a-ban, és
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.$$
- Ha $g(z)$ differenciálható a-ban, és $f(w)$ differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ is differenciálható a-ban, és
$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

A bizonyítás betűről betűre ugyanaz, mint valósban.

A lokális inverz függvény differenciálásánál is működik a többváltozós analízisből tanult szabály átírása.

Tétel (lokális inverzfüggvény differenciálási szabálya)



- Tegyük fel, hogy az $f(z)$ és $g(w)$ függvények egymás *lokális inverzei* az a és b pontok körül, vagyis
  - $f(a) = b$ és $g(b) = a$
  - $f(z)$ értelmes egy $A \subset \mathbb{C}$ halmazon, amelynek a belső pontja, illetve $g(w)$ értelmes egy $B \subset \mathbb{C}$ halmazon, amelynek b belső pontja,
  - $f(A) = B$ és $g(B) = A$; az $f|_A : A \to B$ és $g|_B : B \to A$ függvények bijekciók A és B között, amelyek egymás inverzei;
- $f(z)$ differenciálható a-ban, és $f'(a) \neq 0$;
- $g(w)$ folytonos b-ben.

Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Bizonyítás. A differenciálhatóság definíciója szerint

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) \neq 0,$$

ezért az a egy kis pontozott környezetében $f(z) \neq f(a)$.

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a w ponttal b-hez tartunk, miközben $z = g(w)$.

Mivel g folytonos b-ben, $z = g(w) \to g(b) = a$.

Mivel $f|_A$ és $g|_B$ egymás inverzei, $f(z) = f(g(w)) = w \to b = f(a)$.

Végül,

$$\frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \frac{z - a}{f(z) - f(a)} \to \frac{1}{f'(a)},$$

tehát

$$\lim_{w \to b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

A differenciálási szabály persze nem mond semmit arról, hogy milyen $f(z)$ esetén létezik ilyen lokális inverz függvény. Ha az $f(z)$ differenciálhatóságát csak egyetlen pontban tételezzük fel, akkor a lokális inverz nem feltétlenül létezik.

Lehetséges a többváltozós valós analízisből kedves inverzfüggvénytételt átültetni komplex változós, komplex értékű függvényekre; ebben az esetben azt kell kikötnünk, hogy az $f(z)$ differenciálható az a pont egy környezetében, az $f'(z)$ deriváltfüggvény folytonos az a pontban, és $f'(a) \neq 0$.

Később látni fogjuk, hogy a deriváltfüggvény folytonosságát nem szükséges kikötni, és a lokális inverz létezését is igazolni fogjuk, a többváltozós valósnál sokkal elegánsabb eszközökkel.

Cauchy–Riemann egyenletek

Vizsgáljuk meg, mi a komplex differenciálhatóság definíciója, ha a függvényt kétváltozós, $\mathbb{R}^2$-be képező függvénynek tekintjük. Legyen tehát $f(z)$ komplex függvény, ami értelmes a $z_0 = a + bi$ pont egy környezetében. Az f valós és képzetes részét egy-egy kétváltozós valós értékű függvénynek is tekinthetjük; a z változót $x + yi$ alapban fogjuk kifejezni a valós és a képzetes résszel:

$$\operatorname{Re} f(x+yi) = u(x,y), \quad \operatorname{Im} f(x+yi) = v(x,y).$$

Ha az z_0 ponton át fektetett vízszintes egyenesen tartunk z_0-hoz, akkor rögzítjük $y = b$-t, és az x koordinátával tartunk a-hoz. Feltéve, hogy u és v is parciálisan differenciálható,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x+bi) - f(a+bi)}{(x+bi)-(a+bi)} = \lim_{x\to a} \frac{\big(u(x,b) + v(x,b)i\big) - \big(u(a,b)+v(a,b)i\big)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{u(x,b)-u(a,b)}{x-a} + \frac{v(x,b)-v(a,b)}{x-a} i \right) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) \cdot i, \end{aligned}$$

vagyis $f'(z_0)$ valós és képzetes része $\dfrac{\partial u}{\partial x}(a,b)$, illetve $\dfrac{\partial v}{\partial x}(a,b)$.

Ha függőleges irányból tartunk z_0-hoz, akkor $x = a$-t rögzítjük, és y-nal tartunk b-hez, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y\to b} \frac{f(a+yi) - f(a+bi)}{(a+yi)-(a+bi)} = \lim_{y\to b} \frac{\big(u(a,y) + v(a,y)i\big) - \big(u(a,b)+v(a,b)i\big)}{(y-b)i} \\ &= \lim_{y\to b} \left(\frac{u(a,y)-u(a,b)}{y-b} \cdot \frac{1}{i} + \frac{v(a,y)-v(a,b)}{y-b} \right) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) \cdot i + \frac{\partial v}{\partial y}(a,b); \end{aligned}$$

ebből meg azt olvashatjuk le, hogy $f'(z_0)$ valós és képzetes része $\dfrac{\partial v}{\partial y}(a,b)$, illetve $-\dfrac{\partial u}{\partial y}(a,b)$. A kétféle eredmény összehasonlításából kapjuk a komplex differenciálhatóság feltételét. amit pontosabb számolással be is bizonyítunk:

Tétel (Cauchy-Riemann differenciálegyenletek)

Legyen $f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)i$ (Az u, v függvények valós változósak és valós értékűek). Az f akkor és csak akkor differenciálható az $a + bi$ pontban, ha u és v valós értelemben differenciálható az (a,b) pontban,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)$$

avagy, az $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ leképezés Jacobi-mátrixa az (a,b) pontban

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

alakú.

Bizonyítás. Elég $a = b = 0$-ra bizonyítani. $(r = \sqrt{x^2+y^2}; \quad c, d \in \mathbb{R})$. Ezek ekvivalensek:

- $f'(0) = c + di = R(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
- $f\big(x+yi\big) - f(0) = (c+di)(x+yi) + o(r)$

- $\big(u(x,y)+v(x,y)i\big)-\big(u(0,0)\big)+v(0,0)i\big)=(cx-dy)+(dx+cy)i+o(r)$
- $u(x,y)-u(0,0)=cx-dy+o(r)$ és $v(x,y)-v(0,0)=dx+cy+o(r)$
- u és v diffható $(0,0)$ pontban, $c=\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(0,0)$ és $d=-\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0)$ □

Példa

Hol differenciálható az $f(z)=\overline{z}$ függvény?

1. megoldás:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{\overline{z}-\overline{a}}{z-a}=?$$

vagy,

$$z=a+r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\text{-vel}\quad \frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{r(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$$

a hossza egységnyi, az iránya 2φ, bármi lehet. Nincs határérték; $\overline{z}$ sehol sem differenciálható. □

2. megoldás: Ellenőrizzük a Cauchy-Riemann egyenleteket. Mivel $\overline{x+yi}=x-yi$,

$$u(x,y)=x \quad \text{és} \quad v(x,y)=-y.$$

Azt láthatjuk, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad \text{és} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$

ezek sehol sem egyeznek meg. Tehát, az első Cauchy–Riemann egyenlet sehol sem teljesül, a $\overline{z}$ függvény sehol sem differenciálható. □

Vegyük észre, hogy $\overline{z}$ szög- és körtartó, de nem irányítástartó, hanem irányításváltó.

Megjegyzés

Két tükrözés együtt éppen visszafordítja az irányítást:
Ha az $f(z)$ függvény differenciálható az a pontban, akkor a

$$g(w)=\overline{f(\overline{w})}$$

függvény differenciálható az $\overline{a}$ pontban és $g'(\overline{a})=\overline{f'(a)}$.

Bizonyítás.

$$\lim_{w\to\overline{a}}\frac{g(w)-g(\overline{a})}{w-\overline{a}}=\lim_{z\to a}\frac{\overline{f(z)}-\overline{f(a)}}{\overline{z}-\overline{a}}=\lim_{z\to a}\overline{\left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right)}=\overline{\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}=\overline{f'(a)}.$$ □

Holomorf függvények

A komplex differenciálhatóság nem túl hasznos egyetlen pont esetén, de teljesen más lesz a helyzet, ha a függvényünk egy nyílt halmazon differenciálható.

Definíció (holomorf tulajdonság)

- $f(z)$ az a pontban *holomorf*, vagy *reguláris*, ha az a pont egy környezetében differenciálható.
- $f(z)$ a D tartományon *holomorf*, vagy *reguláris*, ha D minden pontjában differenciálható.
- $f(z)$ *egészfüggvény*, ha az egész síkon holomorf.
- A holomorf $D \to \mathbb{C}$ függvények rendszerét (vektorterét, gyűrűjét) $\mathcal{O}(D)$-vel fogjuk jelölni.

Tétel

Tegyük fel, hogy f holomorf a D tartományon.

(a) $f' \equiv 0$, akkor f konstans.

(b) Ha $\operatorname{Re} f$ vagy $\operatorname{Im} f$ konstans, akkor f konstans.

Bizonyítás. Legyen $f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)i$, ekkor a Cauchy–Riemann egyenletek szerint

$$f'(x+yi) = u_x(x,y) - u_y(x,y)i = v_y(x,y) + v_x(x,y)i.$$

(a) Ha $f' \equiv 0$, akkor $u_x \equiv u_y \equiv v_x \equiv v_y \equiv 0$, ezért u és v minden vízszintes és minden függőleges szakaszon konstans. A D tartomány összefüggő nyílt hamaz, ezért bármely két pontja összeköthető olyan töröttvonallal, amely csak vízszintes és függőleges szakaszokkal; ezért u, v és f is ugyanazt az értéket veszi fel a töröttvonal két végpontjában.

(b) Ha $\operatorname{Re} f = u$ konstans, akkor $u_x \equiv u_y \equiv 0$, és a Cauchy–Riemann egyenletek miatt $v_x \equiv v_y \equiv 0$; a bizonyítást ugyanúgy fejezhetjük be, mint az (a) részben.

Ugyanez történik, ha $\operatorname{Im} f = v$ konstans. □

Ennek a tételnek speciális esete, hogy a konstans függvények kivételével nincs olyan holomorf függvény, amely csak valós, vagy csak tisztán képzetes értékeket venne fel.

Példa

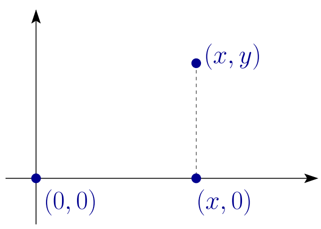
Legyen $u(x,y) = e^x \cos y$. Írjuk fel az összes olyan $v(x,y)$ függvényt, amelyre

$$x + yi \mapsto u(x,y) + v(x,y)i$$

egészfüggvény.

Megoldás: A Cauchy-Riemann egyenletekből

$$v_x = -u_y = e^x \sin y, \qquad v_y = u_x = e^x \cos y.$$



Legyen $C = v(0,0)$.

$$v(x,y) = v(0,0) + \big(v(x,0) - v(0,0)\big) + \big(v(x,y) - v(x,0)\big) =$$
$$= C + \int_0^x v_x(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y v_y(x,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = C + \int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y e^x \cos\zeta\,\mathrm{d}\zeta = C + e^x \sin y.$$

Még nem vagyunk készen; ellenőrizni kell, hogy ezekre a függvényekre tényleg teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek:

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad -u_y = v_x = e^x \sin y. \qquad \square$$

Grafikák komplex függvényekkel

Ezek a műalkotások a Leideni egyetemen találhatók.

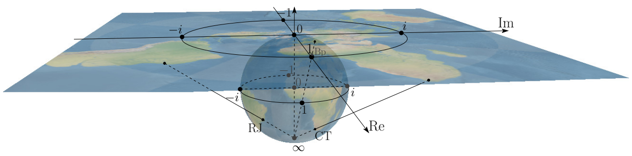
Van Gogh Mező c. képével és a tülörképeivel kicsempézték a síkot, és alkalmazták rá a Riemann-zeta függvényt.
https://pub.math.leidenuniv.nl/~smitbde/vis/goghriemann

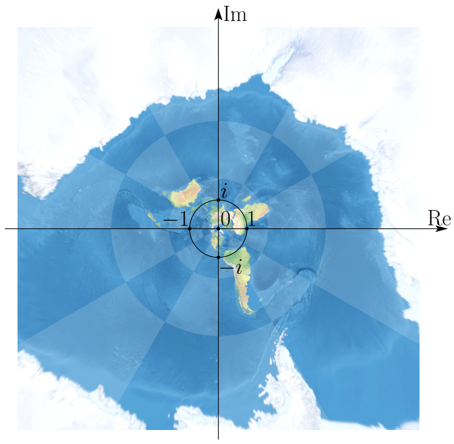
Ugyanaz, mint az előző, csak Rembrant éjjeli őrjárat c. képével és a j-függvénnyel.
https://pub.math.leidenuniv.nl/~smitbde/im/nwdb-cropped-j.png

Ahol a függvény deriváltja nem nulla, ott a kis részletek képe nagyjából hasonló az eredetihez, a hasonlóság jól felismerhető.

Holomorf függvények ábrázolása térképekkel

A síkba vetített földgömböt holomorf függvények ábrázolására is használhatjuk. A szokásos, Északi-sarkból való vetítésnek hátránya, hogy megfordítja az irányítást, ezért vetítsünk inkább a Déli-sarkból. Ennek a vetítésnek előnye, hogy nem csak szög- és körtartó, hanem irányítástartó is.

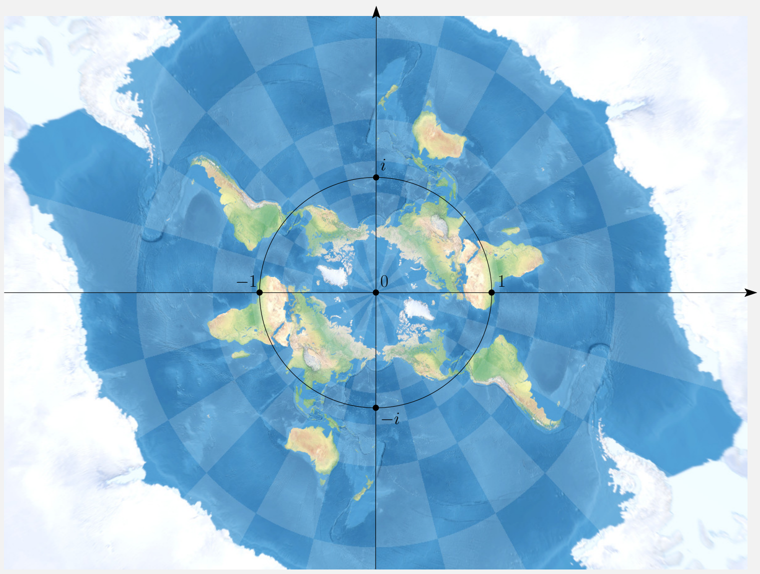




sztereografikus vetület a Déli-sarkból

Egy $f(z)$ függvény "képét" úgy készíthetjük el, hogy minden egyes, a képen szereplő z ponthoz leolvassuk az $f(z)$ pont színét a síkba vetített földgömbön.

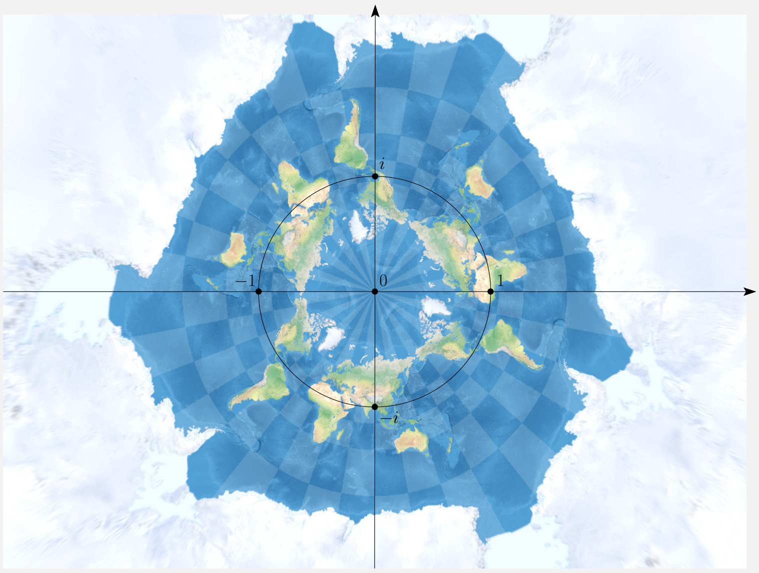
Példa (Az z^2 függvény)



$$f(z) = z^2, \qquad f'(z) = 2z$$

- $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$ (Déli-sark)
- $f(0) = 0$ (Északi-sark)
- $f'(0) = 0$, ott nem szögtartó

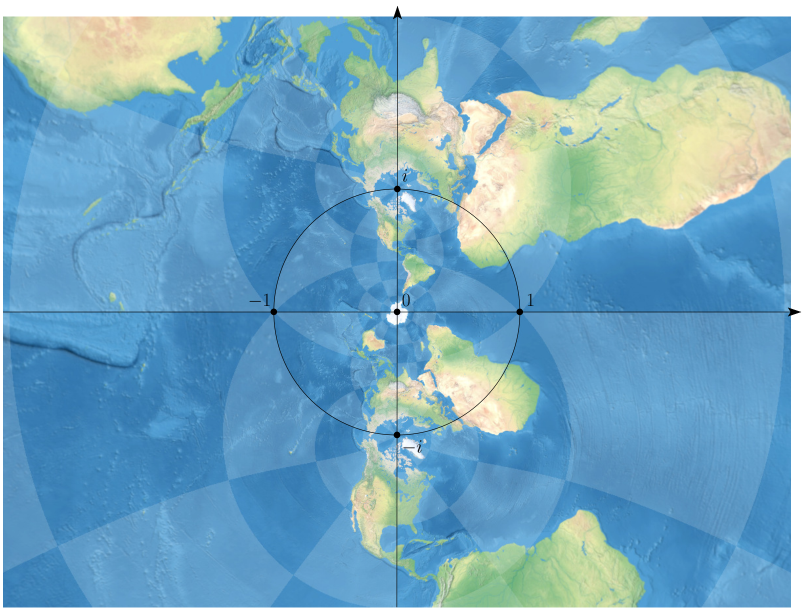
Példa (Az z^3 függvény)



$$f(z) = z^3, \qquad f'(z) = 3z^2$$

- $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$ (Déli-sark)
- $f(0) = 0$ (Északi-sark)
- $f'(0) = 0$, ott nem szögtartó

Például a $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ függvény, az úgynevezett *Zsukovszkij-függvény* képe a következő:



A 0-ban a függvény (határ)értéke ∞, ezért láthatjuk a 0 körül az Antarktiszt. A $\pm i$ pontokban a függvény értéke 0 (Északi-sark).

A ± 1 pontokban $w(\pm 1) = \pm 1$ és $w'(\pm 1) = 0$. Ezekben a pontokban a függvény nem is szögtartó: a sztereografikus vetületen a ± 1 pontokban négy derékszögű tartomány találkozik, a függvény képén pedig nyolc, 45°-os.

3. Hatványsorok

Hatványsor konvergenciája. Differenciálhatóság. Cauchy-Hadamard tétel. Taylor-együttható, egyértelműség. Analitikus függvények.

Eddig nem sok példát láttunk holomorf fügvényre. A differenciálási szabályokból annyit láthatunk, hogy a polinomok és racionális tört függvények holomorfak, de hiányoznak a valós analízisből ismert építőkövek: nem egész kitevős hatványozás, exponenciális és logaritmusfüggvények, trigonometrikus függvények és inverzeik. Ezeknek egy részét egy-egy komplex hatványsor segítségével fogjuk definiálni, de ehhez előbb levezetjük a komplex hatványsorok alapvető tulajdonságait.

Definíció (c körüli hatványsor)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots \qquad (c, a_n \in \mathbb{C}; \quad 0^0 = 1)$$

A középpontban szükségünk van a 0^0 hatványra; ezt 1-nek definiáljuk.

A komplex hatványsorok esetében mindig a legegyszerűbb, pontonkénti konvergenciát fogjuk használni, de meg fogjuk különböztetni azokat az eseteket, amikor a sor abszolút konvergens, vagy valamilyen halmazon egyenletesen is konvergens.

Példák

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ az egész síkon konvergens
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n(z-2)^n$ csak a $z = 2$ pontban konvergens
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ az egységkör belsejében konvergens, a körvonalon és kívül divergens
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2}$ a -1 középpontú zárt egységkörlemezen konvergens, kívül divergens
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ a zárt egységkörlemezen konvergens, kivéve a $z = 1$ pontot

Az utolsó példa nem triviális. A $z = 1$ esetben a sor a jól ismert harmonikus sor, amelynek összege ∞. A $z = -1$ esetben az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$ konvergens Leibniz sort kapjuk. Az egységkörvonal többi pontjában az Abel-átrendezés nevű technikával bizonyíthatjuk, hogy a sor konvergens.

A fenti példákban a konvergenciahalmaz vagy valamilyen körlemez, vagy egyetlen pont, vagy a teljes sík. Ezeket is tekinthetjük elfajuló körlemeznek, amelynek sugara 0, illetve ∞. Ezzel a kiegészítéssel általában is igaz, hogy a konvergenciahalmaz egy körlemez.

Tétel

- A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergenciahalmaza egy c középpontú körlemez, a sugarát hívjuk a sor konvergenciasugarának. A konvergenciasugár lehet 0 és ∞ is.
- A körlemez belsejében a sor abszolút konvergens, külsejében divergens; a határon sokféle eset előfordulhat.
- Bármilyen, kisebb sugarú körlemezen a sor egyenletesen konvergens.

Megjegyzés. *Az abszolút konvergens sorokat szeretjük, mert mindenféle machinációt szabadon elkövethetünk, az egyenletes konvergencia pedig jól jön majd, amikor integrálni akarunk.*

Bizonyítás. Legyen

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ konvergens} \right\} \quad \text{és} \quad R = \sup \Big(|z-c| : z \in K \Big\}.$$

A definíció szerint $K \subset \overline{B}(c,R)$, ezért a $\overline{B}(c,R)$ körön kívül a hatványsor divergens.

Vegünk most egy $r < R$ számot; azt akarjuk igazolni, hogy a $\overline{B}(c,r)$ körlemezen a sor egyenletesen abszolút konvergens; ehhez a Weierstrass-kritétiumot fogjuk használni.

Mivel $r < R$, van olyan $z_0 \in K$ szám amelyre $|z - z_0| > r$. Ebben a pontban a hatványsor konvergens, ezért a tagjai 0-hoz tartanak. Ebből csak arra lesz szükségünk, hogy az $a_n z_0^n$ sorozat korátos; van egy olyan $M \geqslant 0$ szám, amelyre bármely n esetén $|a_n z_0^n| \leqslant M$.

Ezek után bármely $z \in \overline{B}(c,r)$ számra és n indexre

$$\big|a_n(z-c)^n\big| \leqslant |a_n| r^n = \big|a_n(z_0-c)^n\big| \cdot \left(\frac{r}{|z_0-c|}\right)^n \leqslant M \cdot \left(\frac{r}{|z_0-c|}\right)^n.$$

A hatványsort a $\overline{B}(c,r)$ halmazon egyenletesen majorálja a $\sum M \cdot \left(\frac{r}{|z_0-c|}\right)^n$ sor. Ez a sor egy mértani sor, a hányadosa 1-nél kisebb, tehát konvergens. A Weierstrass-kritérium szerint tehát a hatványsor az $\overline{B}(c,r)$ halmazon egyenletesen konvergens.

Az R-nél kisebb sugarú körlemezek uniójaként az egész $B(c,R)$ nyílt körlemez előáll, tehát a kör belseében a hatványsor pontonként konvergens.

A konvergenciasuarat kifejezhetjük az együtthatók abszolút értékeivel.

Tétel (Cauchy–Hadamard tétel)

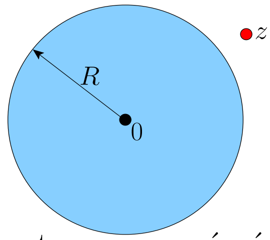
A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ha a $\limsup$ értéke 0, akkor a konvergenciasugár végtelen, tehát a sor az egész síkon konvergens. Ha a $\limsup$ értéke végtelen, akkor a konvergenciasugár 0, tehát a sor csak a középpontban konvergens.

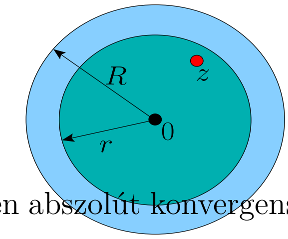
Bizonyítás. Elég $c = 0$-ra.

(a) Ha z az R sugarú körlemez külsejében van, vagyis $|z| > R$, akkor $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$. Emiatt végtelen sok olyan n index van, amelyre $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$. Az ilyen n-ekre $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| > 1$, tehát $|a_n z^n| > 1$. Akkor viszont a sor tagjai nem tartanak 0-hoz, a sor nem lehet konvergens.



(b) Válasszunk most egy tetszőleges $0 < r < R$ sugarat, és vizsgáljuk a sort az r sugarú zárt körlemezen. Legyen $\frac{1}{R} < m < \frac{1}{r}$.

Mivel $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < m$, elég nagy n esetén $\sqrt[n]{|a_n|} < m$. Akkor pedig bármely $z \leqslant r$-re $|a_n z^n| < m^n r^n = (mr)^n$, a hatványsor egyenletesen majorálható a $\sum (mr)^n$ konvergens mértani sorral. Tehát, a Weierstrass-kritérium szerint az r sugarú zárt körlemezen a sor egyenletesen abszolút konvergens.



Ez bármely $r < R$ esetén elmondható, tehát a sor a R sugarú kör belsejében abszolút konvergens.

Tagonkénti differenciálás

Lemma

Tegyük fel, hogy az $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara R.

(a) A tagonkénti deriváltakból álló $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}$ konvergenciasugara is R.

(b) A konvergenciakör belsejében f differenciálható.

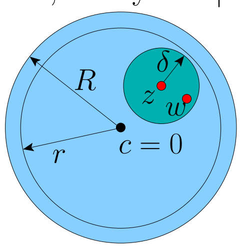
(c) A konvergenciakör belsejében $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}$, vagyis szabad tagonként deriválni.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}.$$

Bizonyítás. (a): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}$ konvergenciasugara ugyanaz, mint $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^n$ konvergencia-sugara, ami

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|na_n|}} = \frac{1}{\limsup\left(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\sqrt[n]{|a_n|}\right)} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

(b,c): Ismét $c=0$; z tetszőleges pont a körön belül, és $|z| < r < R$.
Tudjuk, hogy az $\sum n|a_n|r^{n-1}$ sor konvergens.
Csak olyan w számokat fogunk használni, amelyekre $|w| < r$.



$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w-z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\big(w^{n-1} + w^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}\big). \qquad (*)$$

Az n-edik tag az $a_n \cdot nz^{n-1}$ számhoz tart. Jó lenne a szummát és a tagonkénti határértéket felcserélni.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ehhez van olyan N, hogy $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Ezekhez van olyan $0 < \delta < r - |z|$, hogy $w \in B(z,\delta)$ és $1 \leqslant n \leqslant N$ esetén $\left|a_n\big(w^{n-1} + \ldots + z^{n-1}\big) - na_n z^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2N}$, így

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big(w^{n-1} + \ldots + z^{n-1} - nz^{n-1}\Big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|a_n\big(w^{n-1} + \ldots + z^{n-1}\big) - na_n z^{n-1}\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot 2nr^{n-1} < N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Alternatív befejezés: (Ez változat mértékelméleti eszközöket is használ.) A $(*)$ sort dominálja az $\sum n|a_n|r^{n-1}$ konvergens sor, mert $\left|a_n\big(w^{n-1} + \ldots + z^{n-1}\big)\right| \leqslant |a_n| \cdot nr^{n-1}$.

A dominált konvergencia tétel miatt az összeg és a $w \to z$ határérték felcserélhető:

$$\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}=\lim_{w\to z}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(w^{n-1}+w^{n-2}z+\ldots+z^{n-1}\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{w\to z}\left(a_n\left(w^{n-1}+w^{n-2}z+\ldots+z^{n-1}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nz^{n-1}.$$

Tétel

Legyen

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$$

- $f(z)$ a konvergenciakör belsejében holomorf.
- $f(z)$ a konvergenciakör belsejében akárhányszor differenciálható.
- $a_k=\dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$.
- A hatványsor egyértelmű: Ha $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^n$ a c pont egy környezetében, akkor $a_n=b_n$ minden n-re.

Példa. *Az egységkör belsejében*

$$f(z)=1+z+z^2+z^3+\ldots=\frac{1}{1-z}.$$

Négyzetre emelve:

$$f(z)^2=\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}z^m\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m+n=k}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$$

Négyzetre emelés helyett tagonként deriválva:

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(z^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

4. Elemi függvények

Exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények. A logaritmus és a hatványfüggvény értelmezésének problémái, többértékű függvény holomorf ága.

Elemi függvények definíciói

A valósból ismert hatványsorokat kiterjesztjük komplexre:

Definíció

$$\begin{aligned} e^z = \exp z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - + \dots \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - + \dots \end{aligned}$$

Ezek a sorok az egész síkon konvergensek.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Tétel ($\exp z$ **tulajdonságai)**

(a) $(e^z)' = e^z$;

(b) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$;

(c) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Bizonyítás. (a,b) trivi a hatványsorból.

(c): Rögzítjük a $s = z + w$ számot. Legyen $f(z) = e^z \cdot e^{s-z}$.

$$f'(z) = (e^z \cdot e^{s-z})' = (e^z)' \cdot e^{s-z} + e^z \cdot (e^{s-z})' = e^z \cdot e^{s-z} + e^z \cdot (-e^{s-z}) = 0.$$

f konstans, $f(z) = f(0) = e^s$.

Tehát $e^z \cdot e^w = e^z \cdot e^{s-z} = e^s = e^{z+w}$.

Alternatív bizonyítás a (c) részre:

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) = e^z \cdot e^w.$$

Tétel

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$
- $e^{x+yi} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y); \qquad e^z \neq 0; \qquad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z \equiv \operatorname{Im} z \pmod{2\pi}$
- e^z periodikus $2\pi i$ szerint
- e^z sehol sem 0.
- $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \cos(x + yi) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x + i \dfrac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x$
- $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \sin(x + yi) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$
- $\cos z$ és $\sin z$ periodikus 2π szerint
- $(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$
- A valós tengelyen kívül $\cos z$ és $\sin z$ sehol sem 0. A $\cos z$ és $\sin z$ gyökei a valósból ismert $(k + \frac{1}{2})\pi$, illetve $k\pi$ pontok.
- A $\cos z$ és $\sin z$ függvények nem korlátosak.
- A megszokott trigonometrikus azonosságok érvényesek

Bizonyítás.

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \frac{(iz)^9}{9!} + \dots$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} - + \dots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} - + \dots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Például

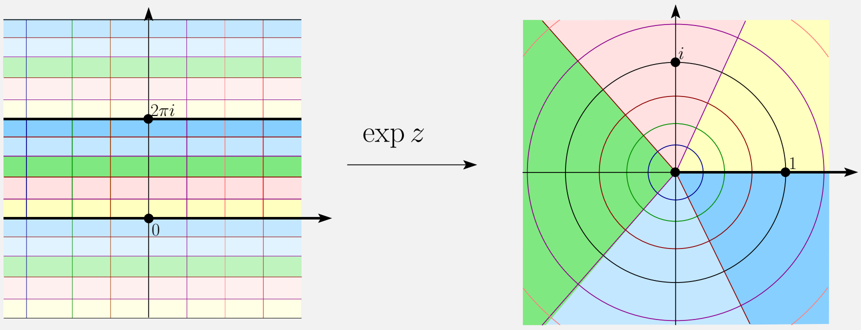
$$\cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w =$$
$$= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \cdot \frac{e^{wi} + e^{-wi}}{2} - \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \cdot \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{2i} =$$
$$= \frac{(e^{zi} + e^{-zi})(e^{wi} + e^{-wi}) + (e^{zi} - e^{-zi})(e^{wi} - e^{-wi})}{4} =$$
$$= \frac{e^{(z+w)i} + e^{-(z+w)i}}{2} = \cos(z + w).$$

A többi azonosságot ugyanígy lehetne ellenőrizni.

Következmény

A komplex exponenciális függvényt alkalmazva

- minden víszszintes egyenes képe 0-ból kiinduló félegyenes;
- minden függőleges egyenes képe 0 középpontú kör,
- vízszintes egyenesekkel határolt sáv képe 0 csúcsú szögtartomány.



Következmény (elemi függvények határértékei, ha $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$)

függvény	$y \to +\infty$	$y \to -\infty$
$e^{iz} = e^{-y+xi}$	0	∞
$e^{-iz} = e^{y-xi} = \dfrac{1}{e^{iz}}$	∞	0
$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$	∞	∞
$\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$	∞	∞
$\operatorname{tg} z = -i\dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = -i\dfrac{1-e^{-2iz}}{1+e^{-2iz}}$	i	$-i$
$\operatorname{ctg} z = i\dfrac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i\dfrac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}}$	$-i$	i

Komplex logaritmus

Rózsaszínű álom: Van-e komplex logaritmus?

Olyan $\log z$ függvényt szeretnénk, amelyre $z \neq 0$ esetén

$$z = e^{\log z},$$

vagyis

$$|z| = \left|e^{\log z}\right| = e^{\operatorname{Re}\log z} \quad \text{és} \quad \arg z = \arg e^{\log z} = \operatorname{Im}\log z,$$

vagyis

$$\operatorname{Re}(\log z) = \underbrace{\log}_{\text{valós log}} |z| \quad \text{és} \quad \operatorname{Im}(\log z) = \arg z$$

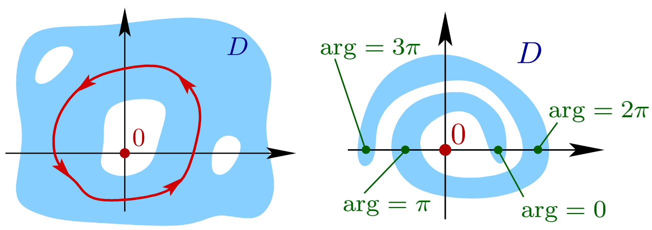
... öö ... és még differenciálható is legyen (de legalább folytonos).

Az argumentumot nem tudjuk folytonosan értelmezni az egész $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ síkon, ezért nincs az egész síkon értelmes logaritmusfüggvény.

- Próbálkozhatunk többértékű függvénnyel, minden nemnulla számnak végtelen sok logaritmusa lesz
- Vagy minden számhoz csak egyetlen értéket választunk, de akkor cserébe nem minden számnak lesz logaritmusa.

Milyen D tartományokon létezik logaritmusfüggvény?

- Szemléletesen, ha a tartomány (vagy a tartományban egy zárt görbe) "megkerüli" a 0-t, mint a balolali ábrán, akkor nem létezik $\arg z$-nek és $\log z$-nek folytonos ága D-n.
- Ha a tartomány "nem kerüli meg" a 0-t, mint például a jobboldali ábrán, akkor létezik D-n folytonos argumentum- és logaritmusfüggvény.

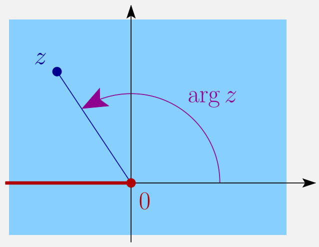


Hamarosan megvizsgáljuk precízebben.

Definíció

A logaritmus "főértéke": Nem értelmezzük a nempozitív valós helyeken.

$$\log z = \underbrace{\log}_{\text{valós log}} |z| + i \cdot \arg z, \qquad -\pi < \arg z < \pi$$



Tétel

Ha a D tartományon létezik a $\log z$-nek folytonos ága, akkor ez holomorf is, és $(\log z)' = \frac{1}{z}$.

Bizonyítás. Legyen $b \in D$ tetszőleges és $a = \log b$. Az inverz függvény differenciálási szabálya működik: $e^a = b$, $\log b = a$, e^w diffható és a deriváltja nem 0, továbbá $\log z$ folytonos b-ben. Tehát,

$$(\log z)'\Big|_{z=b} = \frac{1}{(e^w)'\big|_{w=a}} = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{b}.$$

A logaritmus azonosságai

A valós számkörben érvényes $\log(ab) = \log a + \log b$ azonosság nem marad érvényes, hiszen magát a logaritmust is csak modulo $2\pi i$ értelemben ismerjük, tehát komplexben legfeljebb csak annyit mondhatunk, hogy

$$\log(ab) \equiv \log a + \log b \pmod{2\pi i}.$$

Amikor a logaritmus egy holomorf ágát vesszük egy speciális halmazon, akkor a végtelen sok lehetséges érték közül ragadunk ki egyet. Bármilyen logaritmus ágat (vagy ágakat) választunk is, lesznek olyan esetek, amikor $\log a$, $\log b$ és $\log(ab)$ közül valamelyik nem értelmezett, de még ha értelmesek is, akkor is lehetnek olyan a, b párok, amikor $\log(ab)$ és $\log a + \log b$ nem ugyanaz, hanem a különbségük $2\pi i$-nek valamilyen többszöröse.

Példa

- Ha a logaritmus főértékét vesszük, akkor
  - a nempozitív helyeken nincs értelme a logaritmusnak, így például
  $$\log(-1) \stackrel{?}{=} \log i^2 = 2\log i$$
  baloldala nem is értelmes;
  - például az $a = b = e^{2\pi i/3}$ esetben az argumentum "túlcsordul":
  $$\log a + \log b = \frac{4\pi i}{3} \quad \text{míg} \quad \log(ab) = -\frac{2\pi i}{3}.$$
- Ha a logaritmus főértékéhez $100\pi i$-t hozzáadunk, az is egy logaritmus ág, és például
$$\log 1^2 = \log 1 + \log 1 - 100\pi i.$$

Hatványozás

Megpróbálkozhatunk az
$$a^b = \exp\big(b \cdot (\log a + k \cdot 2\pi i)\big)$$
képlettel. Ez az olyan tartományokon értelmes, ahol van logaritmus.

- Az egész kitevős hatványokkal nincs gond; ha $b \in \mathbb{Z}$, akkor $\log a$ minden értéke ugyanazt a hatvány értéket adja.
- Racionális, de nem egész kitevő esetén véges sok lehetséges érték lehet, például minden komplex számnak két négyzetgyöke van; irracionális kitevő esetén végtelen sok érték létezik.
- Fix alap esetén $\log a$ különböző értékei különböző $a^z = \exp\big(z \cdot \log a\big)$ függvényeket adnak. Sőt, már az 1^z alakú függvényekből is végtelen sok van...
- Megállapodás: ha a fix pozitív valós, akkor a valós értékű logaritmust vesszük, ezzel a valós exponenciális függvényeket terjesztjük ki.
- Ha egy tartományon létezik $\log f(z)$-nek holomorf ága, akkor a logaritmus mindegyik ágából kapunk egy-egy lehetséges $f(z)^{g(z)} = \exp\big(g(z) \cdot \log f(z)\big)$ függvényt, ezek közül választhatunk.

A hatványozás azonosságai

Rögzített alap esetén érvényben maradnak az $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$ és $a^{z-w} = a^z/a^w$ azonosságok, és ezek következményeként egész n számok esetén az $(a^z)^n = a^{nz}$ is, mert mindig ugyanannak az alapnak ugyanazt a logaritmusát vesszük:
$$a^{z+w} = e^{(z+w)\cdot\log a} = e^{z\cdot\log a + w)\cdot\log a} = e^{z\cdot\log a} \cdot e^{w\cdot\log a} = a^z \cdot a^w$$
és
$$a^{z-w} = e^{(z-w)\cdot\log a} = e^{z\cdot\log a - w)\cdot\log a} = \frac{e^{z\cdot\log a}}{e^{w\cdot\log a}} = \frac{a^z}{a^w}.$$

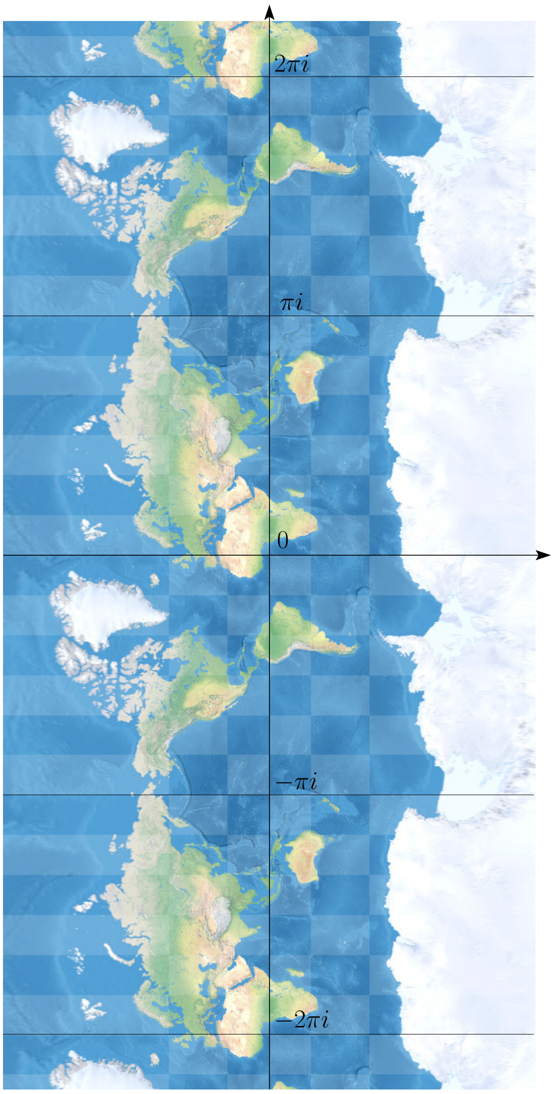
Pozitív valós alapok esetén az $(ab)^z = a^z \cdot b^z$ azonosság is érvényes marad, mert a megállapodásunk szerint mindhárom alapnak a valós logaritmusát használjuk, és ott érvényes a $\log(ab) = \log a + \log b$ azonosság:

$$(ab)^z = e^{z \cdot \log(ab)} = e^{z \cdot (\log a + \log b)} = e^{z \cdot \log a + z \cdot \log b)} = e^{z \cdot \log a} \cdot e^{z \cdot \log b)} = a^z \cdot b^z.$$

Vegyes komplex alapok esetén óvatosan kell eljárnunk, a valósból ismert képletek csak akkor maradnak érvényesek, ha mindenhol a megfelelő logaritmusokat választjuk.

Elemi függvények képei

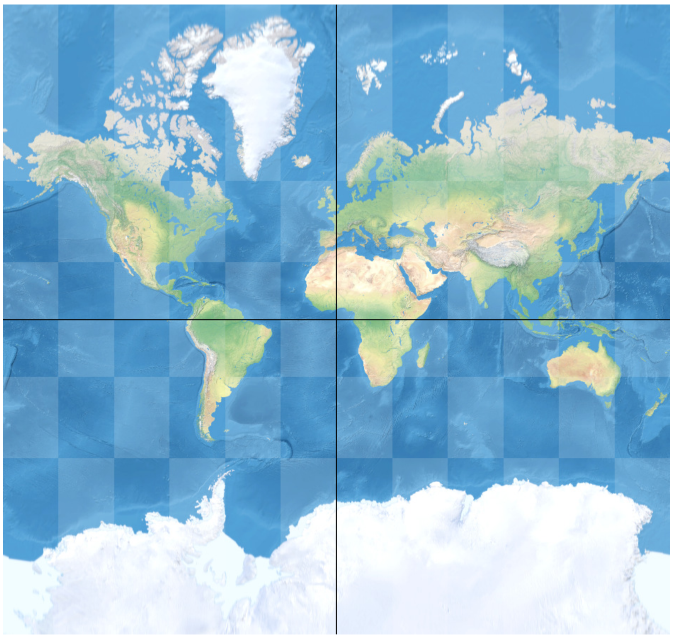
Exponenciális függvény és Mercator-térkép



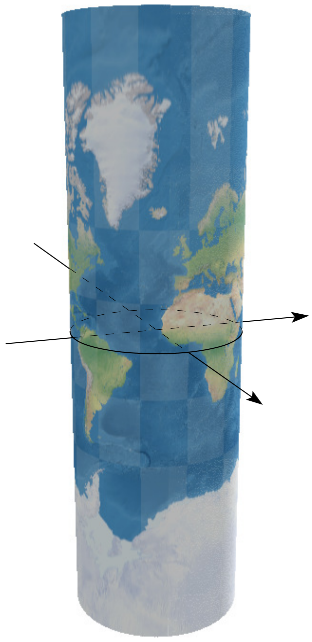
$\exp z$

Az exponenciális függvény $2\pi i$ szerint periodikus. Ha $\operatorname{Re} z \to +\infty$, akkor $e^z \to \infty$, $\operatorname{Re} z \to -\infty$ esetén pedig $e^z \to 0$, ezért látjuk a jobboldalon a Déli-, a baloldalon pedig az Északi-sarkot.

Az exponenciális függvény képéből $-90°$-os elforgatással elforgatva kapjuk az e^{-iz} függvény képét, ami egy függőleges irányban végtelen, 2π széles sávokból álló, periodikus térkép, az úgynevezett *Mercator-térkép*. A térképet végtelen hengerre csavarhatjuk; a henger felső ideális pontja felel meg az Északi-, az alsó ideális pont a Déli-sarknak.



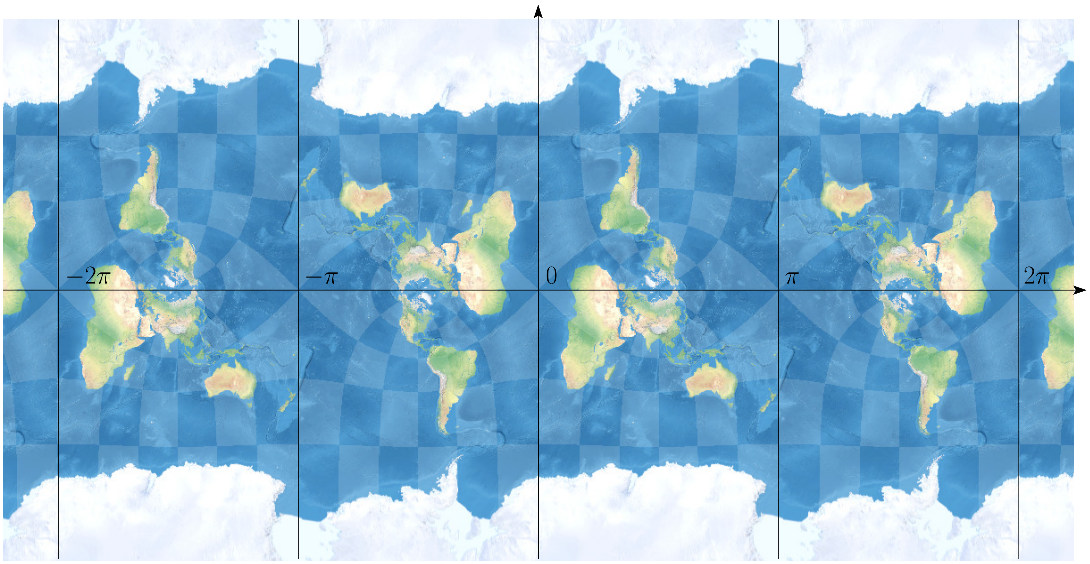
e^{-iz}, Mercator-térkép



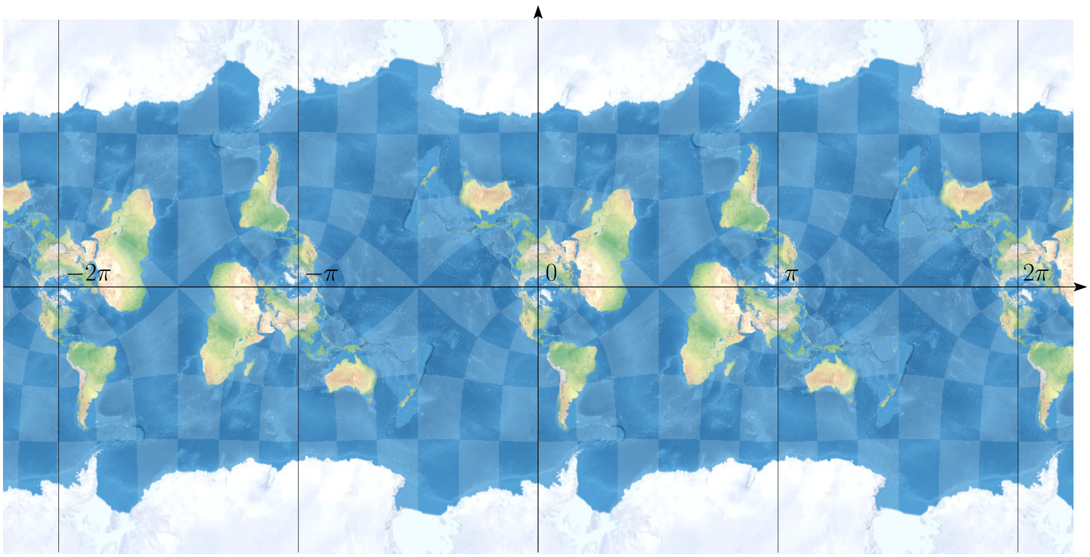
Mercator-térkép végtelen hengerre csavarva

Az e^{-iz} függvény deriváltja, $-ie^{-iz}$ sehol sem 0, ezért a Mercator-térkép mindenhol szögtartó.

Szinusz és koszinusz



$\cos z$

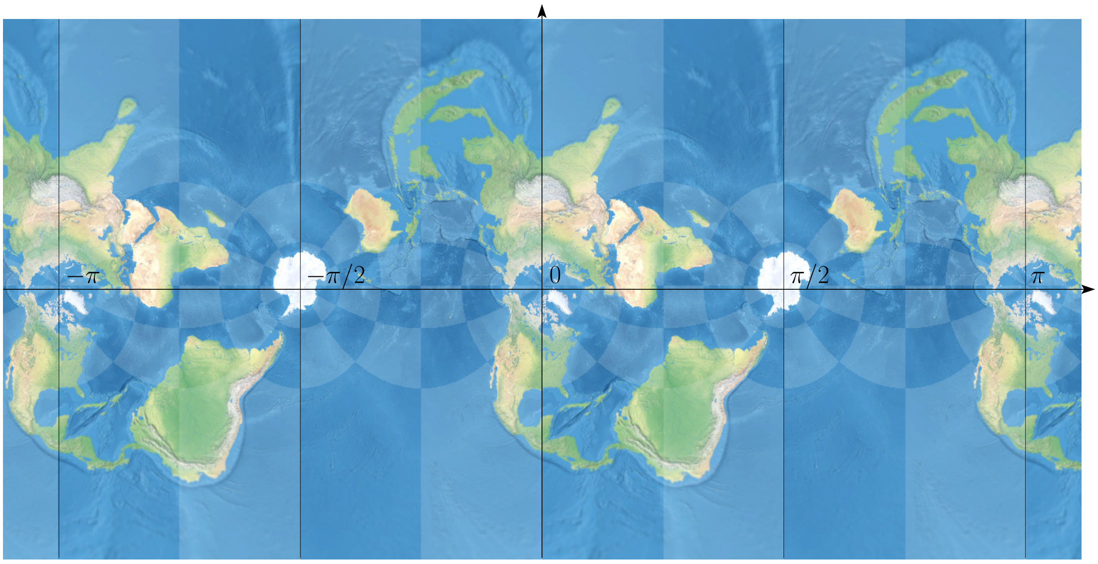


$\sin z$

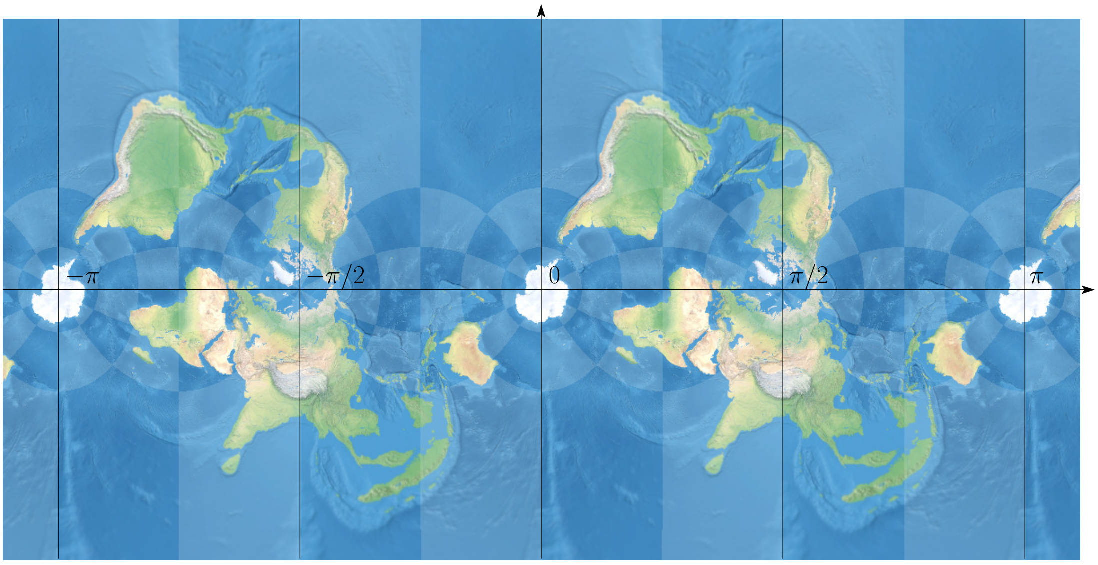
A $\cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$ azonosság miatt a $\cos z$ és $\sin z$ képe egymás eltoltja. $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ esetén $\cos z \to \infty$ és $\sin z \to \infty$, ezért látjuk a kép alsó és felső részén a Déli-sarkot.

Érdemes megkeresni a deriváltak nullhelyeit, ahol a függvények nem szögtartók.

Tangens és kotangens



$\operatorname{tg} z$



$\operatorname{ctg} z$

A $\operatorname{ctg} z = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - z)$ azonosság miatt a $\operatorname{ctg} z$ és $\operatorname{tg} z$ képe egymás középpontos tükörképe. Ha $\operatorname{Im} z \to \infty$ esetekben a függvények határértéke $\pm i$, az i az Indiai-, a $-i$ a Csendes-óceánban van.

A tangens- és a kotangensfüggvény deriváltja sehol sem 0, cserébe vannak olyan pontok, ahol a függvények (határ)értéke ∞.

5. Komplex vonalintegrálok

Rektifikálható folytonos görbén vett folytonos függvény vonalintegrálja. Átírás Riemann-Stieltjes integrálokkal. Átírás Riemann-integrállá, ha a görbe folytonosan differenciálható. Átparaméterezés, additivitás, linearitás. Triviális felső becslés. Helyettesítéses integrálás. Newton-Leibniz formula.

Folytonos görbék

Lényegében ugyanúgy, mint $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció

- Görbe: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto x(t) + y(t)i, \qquad \dot{\gamma} = \dot{x} + \dot{y}i$
- Folytonos, diffható, folytonosan diffható stb., ha $\gamma(t)$, illetve $x(t)$ és $y(t)$ folytonos, diffható, folytonosan diffható stb.
- A görbe hossza a beírt töröttvonalak hosszának szuprémuma: $\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}$. A görbe rektifikálható, ha a hossza véges
- Átparaméterezés: $h : [c, d] \to [a, b]$ szig. mon. növő bijekció; az új görbe $\gamma \circ h$
- A görbe megfordítása: $h : [c, d] \to [a, b]$ szig. mon. csökkenő bijekció; az új görbe $\gamma \circ h$
- Zárt görbe: $\gamma(a) = \gamma(b)$
- Egyszerű görbe: γ injektív.
- Jordan görbe: Olyan zárt görbe, melyre γ $[a, b)$-re megszorítva injektív.

Trivialitás

- Folytonos görbe átparaméterezései is folytonosak.
- A görbe hossza nem függ a paraméterezéstől.

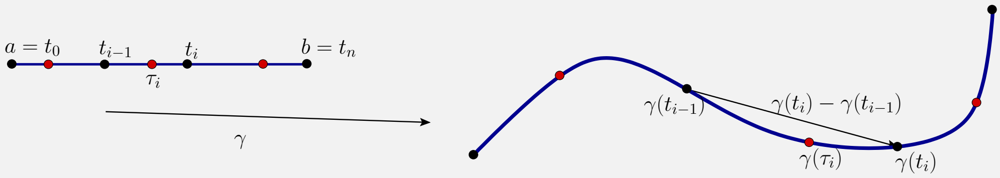
Komplex vonalintegrál

Definíció (komplex vonalintegrál)

Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ folytonos görbe,és $f(z)$ olyan komplex függvény, amely értelmes γ pontjain.
Az $f(z)$ függvény komplex vonalintegrálja a γ görbén az $I \in \mathbb{C}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy az $[a,b]$ paraméterintervallum bármely, δ-nál finomabb $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ felosztására és $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ paraméterértékekre

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big) - I \right| < \varepsilon.$$

Jele: $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, $\int_\gamma f$



Tétel

(a) Ha γ rektifikálható folytonos görbe, és f folytonos, akkor a $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ vonalintegrál létezik.

(b) Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, és f folytonos, akkor $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t$.

Bizonyítás. Legyen $\gamma = x + yi$ és $f = u + vi$. (a) Az integráközelítő összeg

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\Big(u\big(\gamma(\tau_j)\big) + v\big(\gamma(\tau_j)\big)i\Big)}_{f(\gamma(\tau_j))} \cdot \underbrace{\Big(\big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big) + \big(y(t_j) - y(t_{j-1})\big)i\Big)}_{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big) + i \sum_{j=1}^{n} u\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(y(t_j) - y(t_{j-1})\big)$$

$$+ i \sum_{j=1}^{n} v\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big) - \sum_{j=1}^{n} v\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(y(t_j) - y(t_{j-1})\big).$$

Ez a négy összeg az $\int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}x(t)$, az $\int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}y(t)$, az $\int_a^b v(\gamma(t))\mathrm{d}x(t)$, illetve az $\int_a^b v(\gamma(t))\mathrm{d}y(t)$ Riemann-Stieltjes integrál egy-egy közelítő összege.

Az $u \circ \gamma$ stb. integrandusok folytonosak, a $x(t), y(t)$ integrátorok korlátos változásúak, tehát mind a négy RS integrál létezik.

Ha a felosztás elég finom, akkor mind a négy közetítő összeg $\varepsilon/4$-nél közelebb lesz a megfelelő RS integrálhoz. Tehát a vonalintegrál is létezik, és

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}x(t) + i\int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}y(t) + i\int_a^b v(\gamma(t))\mathrm{d}x(t) - \int_a^b v(\gamma(t))\mathrm{d}y(t).$$

(b) Ha $x(t)$ és $y(t)$ is szakaszonként folytonosan differenciálható, akkor mind a négy RS integrál átírható Riemann-integrállá, pl. $\int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}x(t) = \int_a^b u(\gamma(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t$, és

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_a^b u(\gamma(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b u(\gamma(t))\dot{y}(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b v(\gamma(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t - \int_a^b v(\gamma(t))\dot{y}(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \Big(u(\gamma(t)) + v(\gamma(t))i\Big)\cdot\Big(\dot{x}(t) + \dot{y}(t)i\Big)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t.$$

Tétel

Ha γ_1 a γ egy átparaméterezése, akkor

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f.$$

(Ha az egyik létezik, akkor a másik is.)

Bizonyítás. Legyen $\gamma_1 = \gamma \circ h$, $h : [c,d] \to [a,b]$ szig. mon. növő, egyenletesen folytonos. Tegyük fel, hogy $\int_\gamma f$ létezik.

Vegyünk egy tetszőleges ε-t; ehhez létezik a definíciónak megfelelő δ. Ehhez a δ-hoz létezik $\eta > 0$, hogy $u, v \in [c,d]$, $|u-v| < \eta$ esetén $|h(u) - h(v)| < \delta$.

Ha $c = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = d$ egy η-nál finonabb felosztása $[c,d]$-nek, és $v_j \in [u_{j-1}, u_j]$, akkor $a = t_0 = h(u_0) < t_1 = h(u_1) < \ldots < t_n = h(u_n)$ egy δ-nál finomabb felosztása $[a,b]$-nek, $\tau_j = h(v_j) \in [t_{j-1}, t_j]$, és

$$\left|\sum_{j=1}^n f\big(\gamma_1(v_j)\big)\cdot\big(\gamma_1(u_j) - \gamma_1(u_{j-1})\big) - I\right| = \left|\sum_{j=1}^n f\big(\gamma(\tau_j)\big)\cdot\big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big) - I\right| < \varepsilon.$$

5.1. Tétel

- Ha γ a γ_1 és γ_2 egymás után fűzése, akkor

  $$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_1} f.$$

  (Ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is.)

- Ha γ_1 a γ-nak megfordítása, akkor $\int_{\gamma_1} f = -\int_\gamma f$.

- $\int_\gamma 1\mathrm{d}z = \gamma(b) - \gamma(a)$

- Ha $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ és $\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$ létezik és c, d konstansok, akkor

  $$\int_\gamma (c\cdot f(z) + d\cdot g(z))\mathrm{d}z = c\cdot\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + d\cdot\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z.$$

Bizonyítás. Ugyanaz, mint valós vonalintegráloknál.

A vonalintegrál egy alternatív definíciója

Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ rektifikálható, folytonos

- A $\mathrm{d}\gamma$ egy korlátos változású Lebesgue–Stieltjes mérték, a totális variációja $\ell(\gamma)$
- A vonalintegrál a $f \circ \gamma$ függvény Lebesgue–Stieltjes integrálja a $\mathrm{d}\gamma$ mérték szerint.
- Minden Borel-mérhető függvénynek értelmes a vonalintegrálja
- A vonalintegrál lineáris
- A vonalintegrál additív

Lemma (triviális becslés)

Ha a görbe pontjaiban $|f(z)| \leqslant M$, akkor

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant M \cdot \ell(\gamma).$$

Bizonyítás. A becslés minden integrálközelítő összegre igaz:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big|f\big(\gamma(\tau_j)\big)\Big| \cdot \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} M \cdot \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big| = M \cdot \sum_{j=1}^{n} \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big| \leqslant M \cdot \ell(\gamma).$$

Tétel

Legyen γ rektifikálható folytonos görbe; $f_1, f_2, \ldots$, a γ pontjaiban folytonos függvények.

- Ha $f_n \to g$ egyenletesen, akkor $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma g$.
- Ha $\sum f_n = g$ egyenletesen, akkor $\sum \int_\gamma f_n = \int_\gamma g$.

Bizonyítás. Az egyenletes konvergencia miatt g is folytonos.

$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma g\right| = \left|\int_\gamma (f_n - g)\right| \leqslant \Big(\max_\gamma |f_n - g|\Big) \cdot \ell(\gamma) \to 0.$$

Miért szabad vonalintegrálokat felcserélni?

Előfordul, hogy valamilyen kétváltozós $f(z, w)$ függvényt mindkét változója a szerint vonalintegrálunk egy-egy görbén, és szükségünk van a két integrál felcserélésére:

$$\int_{z\in\gamma_1} \left(\int_{w\in\gamma_2} f(z, w)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z \stackrel{?}{=} \int_{w\in\gamma_2} \left(\int_{z\in\gamma_1} f(z, w)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}w$$

Mindig folytonos függvényeket integrálunk rektifikálható görbéken. Ha mindkét görbe folytonosan differenciálható, (speciálisan ha mindkettő egyenes szakasz), $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ és $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$, akkor az Analízis3-ból tanultak működnek: a lebontási tétel miatt

$$\int_{z\in\gamma_1} \left(\int_{w\in\gamma_2} f(z, w)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z = \int_{t=a}^{b} \left(\int_{u=c}^{d} f\big(\gamma_1(t), \gamma_2(u)\big)\dot\gamma_2(u)\mathrm{d}u\right)\dot\gamma_1(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{(t,u)\in[a,b]\times[c,d]} f\big((\gamma_1(t), \gamma_2(u)\big)\dot\gamma_1(t)\dot\gamma_2(u)\mathrm{d}t\mathrm{d}u.$$

A lebontási tétel bizonyítását is meg lehetne ismételni Riemann- helyett vonalintegrálokkal.

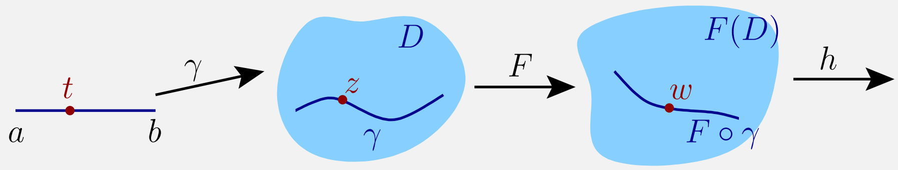
A Fubini-tétellel, mint atomtöltetű ágyúval is le lehet lőni a kérdést. A rektifikálható görbe egyben (véges) komplex mértéktér is, a totális variáció az ívhossz, a vonalintegrál a komplex mérték szerinti integrál.

A Fubini-tételhez két dolgot kell ellenőriznünk: az integrandus, a $f(z,w)$ függvény mérhető és korlátos (mert folytonos), továbbá $|f|$-nek a totális variációk szerinti integrálja véges:

$$\int_{z\in\gamma_1}\left(\int_{w\in\gamma_2}|f(z,w)||\mathrm{d}w|\right)|\mathrm{d}z| \leqslant \ell(\gamma_1)\cdot\ell(\gamma_2)\cdot\max|f(z,w)| < \infty.$$

Newton–Leibniz formula

Tétel (helyettesítéses integrálás)



Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $\gamma : [a,b] \to D$ rektifikálható folytonos görbe, $F : D \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható, továbbá h az $F \circ \gamma$ pontjain folytonos függvény. Ekkor

- Az $F \circ \gamma$ görbe is rektifikálható, és
- $\displaystyle\int_{F\circ\gamma} h(w)\mathrm{d}w = \int_\gamma h(F(z))\cdot F'(z)\mathrm{d}z.$

Tétel (Newton–Leibniz formula komplex vonalintegrálokra)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $\gamma : [a,b] \to D$ rektifikálható folytonos görbe, $F : D \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható. Ekkor

$$\int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

A Newton–Leibniz formula a helyettesítéses integrálás speciális esete $h = 1$-gyel.

Bizonyítás. Először ha γ szakaszonként folytonosan differenciálható:

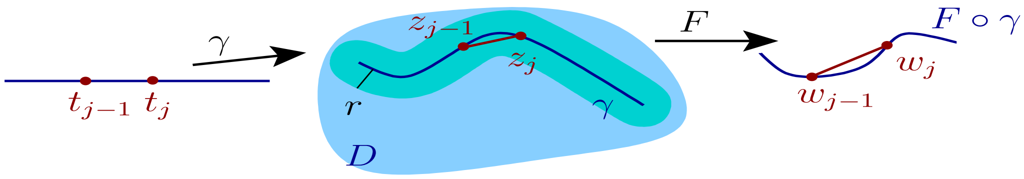
$$\int_{F\circ\gamma} h(w)\mathrm{d}w = \int_a^b h\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)'\mathrm{d}t = \int_a^b h\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot\Big(F'\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\Big)\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma h\big(F(z)\big)\cdot F'(z)\mathrm{d}z = \int_a^b \bigg(h\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot F'\big(\gamma(t)\big)\bigg)\cdot\dot\gamma(t)\mathrm{d}t,$$

ugyanaz.

Minden töröttvonalnak létezik szakaszonként folytonosan differenciálható paraméterezése, tehát a helyettesítéses integrálás képlete igaz töröttvonalakra is.

A γ-nak van egy olyan r sugarú zárt megvastagítása, amely teljes egészében D-be esik. Ez a megvastagítás kompakt, ezen F' és h egyenletesen folytonos és korlátos, $|F'| \leqslant M$ és $|h| \leqslant H$.



Most megmutatjuk, hogy $F \circ \gamma$ rektifikálható.

Vegyük $F \circ \gamma$ egy tetszőleges $(w_0, w_1, \dots, w_n)$ beírt poligonját; a csúcsok ősképei γ-nak egy $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ beírt poligonját adják; véges sok további osztópont beszúrásával elérjük, hogy γ-t r-nél kisebb átmérőjű ívekre osszák.

Az $(F \circ \gamma)$-ba írt poligon oldalszakaszaira már felírhatjuk a tételt a $h = 1$ függvénnyel:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_j - w_{j-1}| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{[w_{j-1},w_j]} 1 \mathrm{d}w \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{[z_{j-1},z_j]} 1 \cdot F'(z) \mathrm{d}z \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} M \cdot |z_j - z_{j-1}| \leqslant M \cdot \ell(\gamma).$$

Tehát $F \circ \gamma$ tényleg rektifikálható. A $\int_{F\circ\gamma} h(w)\mathrm{d}w$ vonalintegrál is biztosan létezik.

A képlet bizonyítása: Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Válasszuk a $t_0, \dots, t_n$ osztópontokat olyan sűrűn, hogy mindkét integrálhoz ε-nál közelebb legyen a megfelelő integrálközelítő összeg, és a γ egy-egy ívének konvex burkán belül F' megváltozása ε-nál kisebb legyen.

$$\left| \int_{F\circ\gamma} h(w)\mathrm{d}w - \int_{\gamma} h(F(z))F'(z)\mathrm{d}z \right| \leqslant \left| \int_{F\circ\gamma} h(w)\mathrm{d}w - \sum_{j=1}^{n} h(w_j)(w_j - w_{j-1}) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{n} h(F(z_j))F'(z_j)(z_j - z_{j-1}) - \int_{\gamma} h(F(z))F'(z)\mathrm{d}z \right| +$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{n} \Big(h(w_j)(w_j - w_{j-1}) - \underbrace{h(F(z_j))}_{h(w_j)} F'(z_j)(z_j - z_{j-1}) \Big) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} \big|h(w_j)\big| \cdot \Big| (w_j - w_{j-1}) - F'(z_j)(z_j - z_{j-1}) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + H \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{[z_{j-1},z_j]} F'(z)\mathrm{d}z - \int_{[z_{j-1},z_j]} F'(z_j)\mathrm{d}z \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + H \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{[z_{j-1},z_j]} \Big(F'(z) - F'(z_j) \Big) \mathrm{d}z \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + H \sum_{j=1}^{n} \varepsilon \cdot |z_j - z_{j-1}| \leqslant (2 + H\ell(\gamma)) \cdot \varepsilon.$$

Ez tetszőlegesen kicsi ε-ra igaz, tehát a két integrál egyenlő.

Példa

Integráljuk a $z \mapsto z$ függvényt az $y = x^2$ parabola 0 és $1 + i$ közötti ívén.

1. megoldás: Legyen $\gamma(t) = t + it^2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, akkor $\dot\gamma(t) = 1 + 2it$,

$$\int_{\gamma} z\mathrm{d}z = \int_0^1 (t + it^2)(1 + 2it)\mathrm{d}t = \int_0^1 (t + 3it^2 - 2t^3)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 + it^3 - \frac{1}{2}t^4 \right]_0^1 = i.$$

2. megoldás: Mivel $z = (\frac{1}{2}z^2)'$, a Newton–Leibniz formula szerint

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\gamma(1)^2 - \frac{1}{2}\gamma(0)^2 = \frac{1}{2}(1+i)^2 - \frac{1}{2}0^2 = i.$$

Ívhossz szerinti integrál

Az ívhossz szerinti integrál ugyanaz, mint kétváltozós valósban, ezért nem definiáltuk külön.

Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ elég sima görbe, akkor a szokásos átírás Riemann-integrállá

$$\int_\gamma f(z)|\mathrm{d}z| = \int_{t=a}^{b} = f\big(\gamma(t)\big) \cdot \big|\dot\gamma(t)\big|\mathrm{d}t.$$

Ívhossz szerinti integrál az egységkörvonalon

Az egységkörvonal szokásos paraméterezése $z = \gamma(t) = e^{it}$; amikor a vonalintegrált és az ívhossz szerinti integrált átírjuk Riemann-integrállá,

$$\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{2\pi} f(e^{it}) \cdot ie^{it}\mathrm{d}t,$$

illetve

$$\int_{|z|=1} f(z)|\mathrm{d}z| = \int_\gamma f(z)|\mathrm{d}z| = \int_{t=0}^{2\pi} f(e^{it})\mathrm{d}t;$$

ebből is leolvashatjuk a jelöléseket, hogy $\mathrm{d}t = |\mathrm{d}z|$ és $\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t = iz|\mathrm{d}z|$.

Geometriailag, amikor a körvonalon a z pontból a $z + \mathrm{d}z$ pontba lépünk, a $\mathrm{d}z$ iránya iz, a hossza $|\mathrm{d}z|$, vagyis

$$\mathrm{d}z = iz|\mathrm{d}z|, \qquad |\mathrm{d}z| = \frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

Ezeket a képleteket akkor használhatjuk, amikor vonalintegrált akarunk ívhossz szerinti integrállá átírni vagy fordítva.

6. Cauchy-alaptétel

A primitív függvény létezésének kapcsolata a vonalintegrál eltűnésével. Goursat-lemma és általánosítása. Cauchy-alaptétel konvex, és csillagszerű tartományra. Holomorf függvénynek minden konvex/csillagszerű tartományon van primitív függvénye. Homotóp görbéken a vonalintegrál megegyezik. Példa arra, hogy nem egyszerű tartományon a Cauchy-alaptétel nem igaz.

Folytonos függvény primitív függvénye

6.1. Tétel (A primitív függvény létezése)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos. Ezek ekvivalensek:

(a) f-nek létezik primitív függvénye: valamilyen $F \in \mathcal{O}(D)$ függvénnyel $f = F'$.

(b1) Közös végpontú, D-ben fekvő rektifikálható folytonos görbéken f vonalintegrálja egyenlő.

(b2) f komplex vonalintegrálja 0 minden D-beli zárt, rektifikálható folytonos görbén.

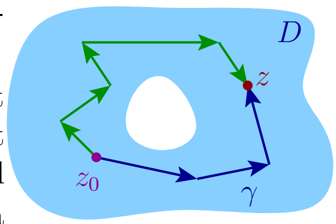
(c1) Közös végpontú, D-ben fekvő töröttvonalakon f vonalintegrálja egyenlő.

(c2) f vonalintegrálja 0 minden D-beli zárt töröttvonalon.

Bizonyítás. (a)$\Longrightarrow$(b): következik a Newton–Leibniz formulából.

(b)$\Longrightarrow$(c): trivi (minden TV egyben rektifikálható folytonos görbe is).

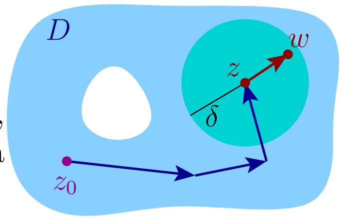
(c)$\Longrightarrow$(a): megismételjük a valós függvényeknél látott bizonyítást. Kijelölünk egy $z_0 \in D$ kezdőpontot, és F-et így definiáljuk: $F(z) = \int_\gamma f(w)\mathrm{d}w$, bármelyik z_0-t z-vel összekötő γ töröttvonalon. A (c) tulajdonság miatt a vonalintegrál értéke független a töröttvonaltól.
Azt kell még ellenőrizni, hogy tényleg $F'(z) = f(z)$.



Vegyünk egy tetszőleges $z \in D$ pontot. Azt fogjuk igazolni, hogy $F'(z) = f(z)$.

Legyen $\varepsilon > 0$ szintén tetszőleges.

Az f folytonos z-ben, tehát van olyan $\delta > 0$, hogy $B(z,\delta) \subset D$, továbbá minden $\zeta \in B(z,\delta)$-ra $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.



$0 < |w - z| < \delta$ esetén

$$F(w) - F(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{[z,w]} f(z)\mathrm{d}\zeta + \int_{[z,w]} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\mathrm{d}\zeta$$
$$= f(z)(w-z) + \int_{[z,w]} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\mathrm{d}\zeta,$$
$$\Big|F(w) - F(z) - f(z)(w-z)\Big| = \left|\int_{[z,w]} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\mathrm{d}\zeta\right|$$
$$\leqslant \Big(\sup_{\zeta\in[z,w]} \big|f(\zeta) - f(z)\big|\Big) \cdot |w-z| \leqslant \varepsilon \cdot |w-z|,$$
$$\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Tehát $\lim\limits_{w\to z} \dfrac{F(w)-F(z)}{w-z} = f(z)$; az F függvény differenciálható a z pontban, és $F'(z) = f(z)$.

Ez minden $z \in D$ pontban igaz, tehát F primitív függvénye f-nek.

Holomorf függvény primitív függvénye

Lemma (Goursat-lemma)

Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf.
Ha Δ irányított háromszögvonal, a belsejével együtt D-be esik, akkor $\int_\Delta f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Bizonyítás. Definiálunk egy $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$ háromszögsorozatot. A Δ_n mentén a vonalintegrál $I_n = \int_{\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z$.

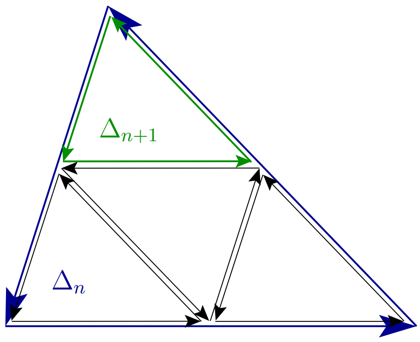
Az első háromszög maga a Δ: elem $\Delta_0 = \Delta$, és azt akarjuk igazolni, hogy $I_0 = 0$.

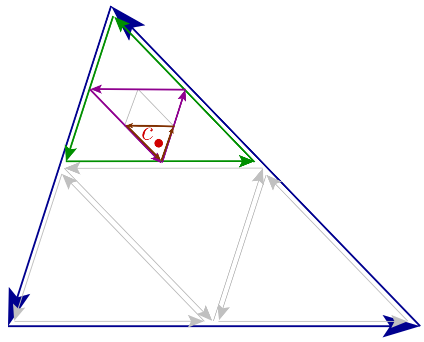
Ha Δ_n már megvan, akkor a középvonalakkal négyfelé osztjuk, és Δ_{n+1} az a negyed háromszög lesz, amelyen a vonalintegrál abszolút értéke a legnagyobb.

A négy integrál összege I_n, tehát $|I_{n+1}| \geqslant \dfrac{|I_n|}{4}$;

Indukcióval $|I_n| \geqslant \dfrac{|I_0|}{4^n}$, a Δ_n kerülete $\ell(\Delta_n) = \dfrac{\ell(\Delta)}{2^n}$.

Legyen c az a pont, amelyre a hármszögsorozat összehúzódik.



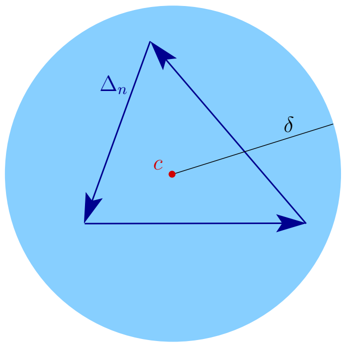


A f differenciálható a c pontban. Az $f(c) = a$ és $f'(c) = b$ számokkal a c közelében $f(z) \approx a + b(z - c)$.

Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t.
Mivel f differenciálható c-ben, van olyan $\delta > 0$, hogy a $B(c, \delta)$ körben

$$\big|f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)\big| = \big|f(z) - a - b(z - c)\big| \leqslant \varepsilon \cdot |z - c|.$$

Vegyünk egy olyan nagy n-et, amelyre már $\Delta_n \subset B(c, \delta)$.



$$\frac{|I_0|}{4^n} \leqslant |I_n| = \left|\int_{\Delta_n} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{\Delta_n} \underbrace{\big(a + b(z - c)\big)}_{\text{van primitív függvénye}} \mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\Delta_n} \big(f(z) - a - b(z - c)\big)\mathrm{d}z\right| \leqslant$$

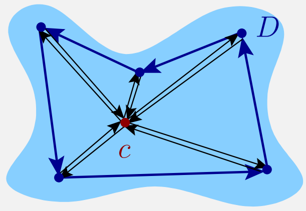
$$\leqslant 0 + \max_{z \in \Delta_n} \Big|f(z) - a(z - c) + b\Big| \cdot \ell(\Delta_n) < (\varepsilon \cdot \ell(\Delta_n)) \cdot \ell(\Delta_n) = \varepsilon \cdot \left(\frac{\ell(\Delta)}{2^n}\right)^2$$

$$|I_0| < \varepsilon \cdot \ell(\Delta)^2.$$

Ez minden ε-ra igaz, tehát $I_0 = 0$.

Tétel

Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf.



- Ha D csillagszerű (pl. konvex), akkor f integrálja 0 minden D-ben fekvő zárt töröttvonalon. Ha D csillagszerű, akkor f-nek létezik primitív függvénye.
- f-nek minden pont körül létezik lokális primitív függvénye.
- Közös végpontú homotóp rektifikálható görbéken f vonalintegrálja ugyanaz.
- Homotóp zárt rektifikálható görbéken f vonalintegrálja ugyanaz.
- Nullhomotóp rektifikálható zárt görbéken f vonalintegrálja 0.

Tétel (Cauchy-tétel; Cauchy-féle integráltétel; Cauchy-alaptétel; a komplex analízis főtétele)

Ha D egyszeresen összefüggő tartomány, és f holomorf D-n, akkor minden, D-ben fekvő rektifikálható folytonos zárt γ görbén $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Tétel

Ha D egyszeresen összefüggő tartomány, és f holomorf D-n, akkor f-nek létezik primitív függvénye.

Példa

Az $\dfrac{1}{z}$ függvény holomorf a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tartományon, de a tartomány nem egyszeresen összefüggő.

Számítsuk ki a függvény vonalintegrálját az egységkörvonalon.

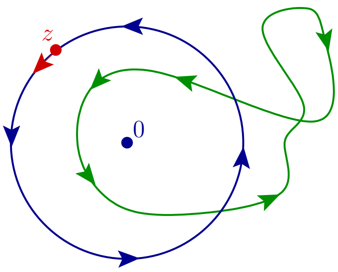
$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = ?$$

(Jelölés: $\int_{|z-c|=R}$ azt jelenti, hogy a pozitív irányítású körön integrálunk.)

A kör egy paraméterezése $z(t) = e^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$; $\dot{z} = ie^{it}$ avagy $\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t$;

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it}\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} i\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

(Ha létezne holomorf logaritmus a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tartományon, akkor az integrál 0 lenne.)



Az irányított körvonallal homotóp görbéken az integrál ugyanez.

7. Cauchy-integrálformulák

Cauchy-formula körvonalon, konvex és csillagszerű tartományon. A deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula. Ha egy függvény egy nyílt halmazon egyszer differenciálható, akkor akárhányszor differenciálható. Görbe pontra vonatkozó indexe. Az index tulajdonságai. Az általános Cauchy-formula görbeindexszel (csak kimondani). A logaritmus létezése egyszeresen összefüggő tartományon.

A Cauchy-formula

Lemma

Bármely $c \in \mathbb{C}$ és $r > 0$ esetén

$$\int_{|z-c|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z-c} = 2\pi i.$$

Bizonyítás. A körvonal egy paraméterezése $z(t) = c + re^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

$$\int_{|z-c|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z-c} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)-c} \cdot \dot{z}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \cdot rie^{it}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

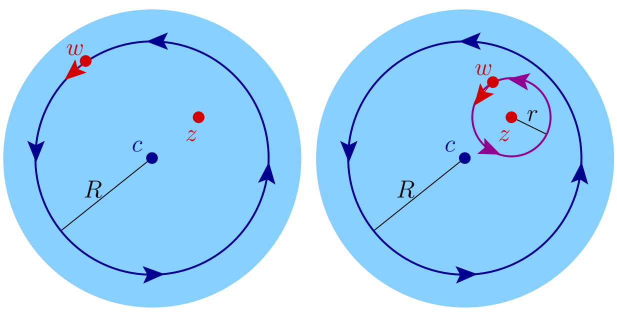
Tétel (Cauchy-formula körlapra)

Legyen f holomorf a $B(c,R)$-nál valamivel nagyobb körlapon. Ekkor bármely, $z \in B(c,R)$ pontban

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ehhez van olyan $r > 0$, hogy $|w-z| \leqslant r$ esetén $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. A $|w-c| = R$ körvonal homotóp a $|w-z| = r$ körvonallal, így

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \\
= f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{1}{w-z}\mathrm{d}w &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\mathrm{d}w = \\
&= f(z) \cdot 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\mathrm{d}w;
\end{aligned}$$



$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(z)-f(w)}{w-z}\mathrm{d}w \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

Ez minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, tehát $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - f(z) \right| = 0.$

Tétel (a derviáltakra vonatkozó Cauchy-formula, körlapra))

Legyen f holomorf a $B(c,R)$-nál valamivel nagyobb körlapon. Ekkor $B(c,R)$ belsejében a körlapon akárhányszor differenciálható, és

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\mathrm{d}w.$$

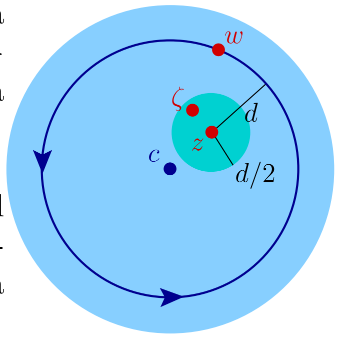
Formálisan

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{f(w)}{w-z}\right)\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{n!\cdot f(w)}{(w-z)^{n+1}}\mathrm{d}w.$$

Bizonyítás. Indukció n szerint; $n=0$-ra ez éppen a Cauchy-formula. Ha az állítás igaz n-re, akkor

$$f^{(n+1)}(z) = \lim_{\zeta\to z}\frac{f^{(n)}(\zeta)-f^{(n)}(z)}{\zeta - z} =$$
$$= \lim_{\zeta\to z}\frac{1}{\zeta-z}\left(\frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}}\mathrm{d}w - \frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\mathrm{d}w\right) =$$
$$= \lim_{\zeta\to z}\frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}(w-z)^{n+1}}\cdot\frac{(w-z)^{n+1}-(w-\zeta)^{n+1}}{\zeta-z}\mathrm{d}w =$$
$$= \lim_{\zeta\to z}\frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}(w-z)^{n+1}}$$
$$\cdot\Big((w-z)^n + (w-z)^{n-1}(w-\zeta) + \ldots + (w-\zeta)^n\Big)\mathrm{d}w.$$

A körvonalon f folytonos, tehát korlátos. Ha z távolsága a körvonaltól d, akkor $\zeta\in B(z,\frac{d}{2})$ esetén $|w-\zeta|>\frac{d}{2}$, és az integrandus $\zeta\to z$ esetén egyenletesen tart a $\dfrac{f(w)}{(w-z)^{2n+2}}\cdot(n+1)(w-z)^n$ függvényhez.
(Az egyenletes határérték felcserélhető az összeadással és a szorzással, és reciprokkal is, ha a nevező limeszfüggvénye nem torlódik a 0-hoz.) Az egyenletes konvergencia miatt a limesz és az integrál felcserélhető:



$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|w-c|=R}\lim_{\zeta\to z}\left(\frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}(w-z)^{n+1}}\Big((w-z)^n+\ldots+(w-\zeta)^n\Big)\right)\mathrm{d}w =$$
$$= \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|w-c|=R}\lim_{\zeta\to z}\left(\frac{f(w)}{(w-z)^{2n+2}}\cdot(n+1)(w-z)^n\right)\mathrm{d}w = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\mathrm{d}w.$$

Egy másik lehetőség a korlátos konvergencia tétel alkalmazása. A körvonalon $\mathrm{d}z$ véges Lebesgue–Stieltjes mérték, $|\zeta-z|<\frac{d}{2}$ esetén az integrandus egyenletesen korlátos, így az integrál és a pontonkénti limesz felcserélhető.

Utolsó lehetőségként (pl. vizsgán) hivatkozhatunk Nagy Bivaly barátságára is.

Következmény

Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos.

- Ha f holomorf, akkor akárhányszor differenciálható.
- f akkor és csak akkor holomorf, ha lokálisan létezik primitív függvénye.

Következmény (Morera tétele)

Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos. Ha f-nek minden D-ben fekvő háromszöglemez kerülete mentén 0 a vonalintegrálja, akkor f holomof.

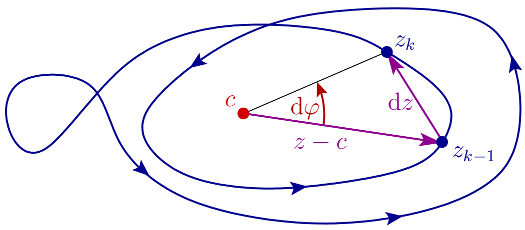
Definíció (görbe indexe)

Legyen γ rektifikálható, folytonos zárt görbe, és c egy olyan pont, amelyen γ nem megy át. A γ görbe c-re vonatkozó indexe, avagy c körüli körüljárási száma

$$n(\gamma, c) = \operatorname{ind}_\gamma(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-c}.$$

Mostantól a $\dfrac{1}{2\pi i}$ kvázi az integráljel része; a legtöbb esetben az integráljelt elkíséri...

A görbeindex definíciójának is van egy szép geometriai értelmezése.



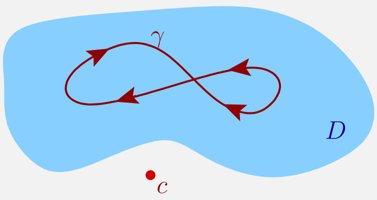
$$\mathrm{d}\big(\arg(z-c)\big) \approx \operatorname{Im}\frac{z+\mathrm{d}z-c}{z-c} = \operatorname{Im}\frac{\mathrm{d}z}{z-c}$$

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k}\frac{\mathrm{d}z}{z-c} = \log\frac{z_k-c}{z_{k-1}-c} = \Big(\log|z_k-c| - \log|z_{k-1}-c|\Big) + i\cdot\arg\frac{z_k-c}{z_{k-1}-c}$$

$$\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z-c} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\Big(\log|z_k-c| - \log|z_{k-1}-c|\Big)}_{0} + i\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta\big(\arg(z-c)\big) = 2\pi i\cdot n(\gamma,c).$$

Görbeindex és egyszeres összefüggőség

Tétel



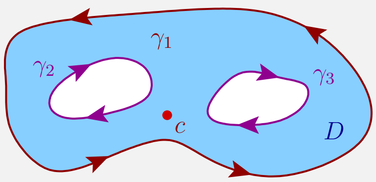
Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány. Ezek ekvivalensek:

(1) D egyszeresen összefüggő;

(2) Bármely $c \notin D$-re és D-beli rektifikálható, zárt folytonos γ görbére $n(\gamma, c) = 0$.

Az (1) $\Rightarrow$ (2) triviális. A (2) $\Rightarrow$ (1) irányt most nem bizonyítjuk.

Tétel

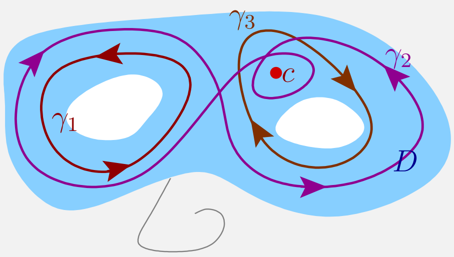


Ha a $D \subset \mathbb{C}$ korlátos tartományt a $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható görbék határolják, a külső határgörbe pozitív, a belső határgörbe negatív irányítású, akkor

(1) $c \in D$ esetén $\sum n(\gamma_j, c) = 1$

(2) $c \notin D$ esetén $\sum n(\gamma_j, c) = 0$.

Tétel (Általános Cauchy-tétel)



Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf, valamint $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható zárt görbék D-ben úgy, hogy bármely $c \in \mathbb{C} \backslash D$ pontra $\sum n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z) \mathrm{d}z = 0.$$

Tétel (Általános Cauchy-formula)

Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf, valamint $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható zárt görbék D-ben úgy, hogy bármely $c \in \mathbb{C} \backslash D$ pontra $\sum n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor bármely $z \in D$ esetén, amelyen nem mennek át ezek a görbék,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w = \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, z) \right) \cdot f(z).$$

A logaritmus létezése

Tétel

- Ha D egyszeresen összefüggő tartomány és $0 \notin D$, akkor létezik $\log z$-nek holomorf ága D-n.
- Ha D tartomány, $0 \notin D$, és bármely D-beli zárt görbe 0-ra vonatkozó indexe 0, akkor létezik $\log z$-nek holomorf ága D-n.

Bizonyítás. Az ötlet: Vegyük $1/z$ egy primitív függvényét.

Bármely D-beli zárt görbének a 0-ra vonatkozó indexe 0, tehát $1/z$ vonalintegrálja 0. Ezért $1/z$-nek létezik primitív függvénye D-n.

Válasszunk egy $z_0 \in D$ kezdőpontot, és egy olyan $L(z)$ függvényt, amelyre $L'(z) = \dfrac{1}{z}$ és $e^{L(z_0)} = z_0$ (az L-hez hozzáadhatunk egy konstanst).

Legyen $h(z) = z \cdot e^{-L(z)}$; ekkor tehát $h(z_0) = 1$,

$$h'(z) = \left(z \cdot e^{-L(z)}\right)' = e^{-L(z)} - z \cdot e^{-L(z)} \underbrace{L'(z)}_{1/z} = 0,$$

ezért h konstans 1, tehát $e^{L(z)} = z$; az $L(z)$ függvény a $\log z$-nek holomorf ága.

Tétel

Ha D egyszeresen összefüggő tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, és sehol sem 0, akkor létezik $\log f(z)$-nek holomorf ága D-n.

Bizonyítás. Ötlet: Ha létezik $\log f$, akkor a deriváltja $\dfrac{f'}{f}$. Vegyük ennek egy primitív függvényét.

Legyen $\ell(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$; ez holomorf D-n. A D egyszeresen összefüggő, tehát $\ell(z)$-nek létezik primitív függvénye. Vegyünk egy $z_0 \in D$ kezdőpontot, és válasszunk egy olyan $L(z)$ függvényt, amelyre $L' = \ell$ és $e^{L(z_0)} = f(z_0)$. Legyen $h(z) = f(z)e^{-L(z)}$ ekkor tehát $h(z_0) = 1$,

$$h'(z) = \left(f(z)e^{-L(z)}\right)' = f'(z)e^{-L(z)} - f(z)e^{-L(z)} \underbrace{L'(z)}_{f'/f} = 0,$$

ezért h konstans 1, tehát $e^{L(z)} = f(z)$; az $L(z)$ függvény a $\log f(z)$-nek holomorf ága.

Példa (Young-tétel)

Ha $f(z,w)$ kétváltozós komplex függvény, folytonos az (a,b) egy környezetében, és mindkét változó szerint holomorf, akkor a $D_1D_2f(z,w)$ és $D_2D_1f(z,w)$ másodrendű parciális deriváltak léteznek és egyenlők.

Bizonyítás. a és b körül veszünk egy-egy pici, r sugarú körvonalat. Ezeken belül Cauchy-formula w-re:

$$D_2f(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega-b|=r}\frac{f(z,\omega)}{(\omega-w)^2}\mathrm{d}\omega.$$

Ez z-ben holomorf, mert minden kis Δ háromszögön 0 az integrálja:

$$\int_\Delta\left(\int_{|\omega-b|=r}\frac{f(z,\omega)}{(\omega-w)^2}\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{|\omega-b|=r}\left(\int_\Delta f(z,\omega)\mathrm{d}z\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega-w)^2} = \int_{|\omega-b|=r} 0\cdot\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega-w)^2} = 0.$$

Most Cauchy-formula z-re:

$$D_1D_2f(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=r}\frac{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\omega-b|=r}\frac{f(\zeta,\omega)}{(\omega-w)^2}\mathrm{d}\omega}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\zeta-a|=r}\int\limits_{|\omega-b|=r}\frac{f(\zeta,\omega)}{(\zeta-z)^2(\omega-w)^2}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\omega.$$

A $D_2D_1f(z,w)$-re ugyanez a képlet.

A bizonyítás apró módosításával azt is látjuk, hogy $f(z,w)$, mint kétváltozós függvény, akárhányszor differenciálható.

Pistikének mindenről

♥ Pistikének mindenről ♥

- ♥ Fel akarjuk írni egy függvény harmadik deriváltját? Integrálni kell.
- ♥ Igazolni akarjuk, hogy egy függvény holomorf? Integrálni kell.
- ♥ Meg akarjuk konstruálni a logaritmusfüggvényt? Integrálni kell.
- ♥ Meg akarjuk számolni, hogy egy görbe hányszor kerüli meg a nullát? Integrálni kell.
- ♥ Be akarjuk bizonyítani a Young-tételt? Integrálni kell.
- ♥ Hatványsorba akarunk fejteni egy függvényt? Integrálni kell. (jövő héten.)
- ♥ Meg akarjuk számolni, hogy egy egyenletnek hány megoldása van? Integrálni kell.
- ♥ Be akarjuk bizonyítani az implicitfüggvény-tételt? Integrálni kell.

Integrálokat csereberélni jó! :-)

Már láttuk, hogy többféle, holomorf függvényekkel kapcsolatos operációt átírhatunk valamilyen komplex vonalintegrállá. A Cauchy-formulák tanulsága, hogy még a deriváltást is át lehet írni integrállá. Később látni fogjuk, hogy egyenletek megoldását vagy a megoldások számát is felírhatjuk integrál alakban.

Ezek az átírások azért is hasznosak, mert általában integrálokat felcserélni sokkal könnyebb, mint más operációkat. Az ilyen cserékre pedig a középiskola óta lépten-nyomon szükségünk van, kezdve például a közepek közötti egyenlőtlenségektől, vagy mint az alábbi irodalmi párbeszédben.

Pireuszi közjáték — miniszimpózium az operációk felcserélhetőségéről

– Hé, Krokodil! Mit akartok attól a kölyöktől? Úgy láttam, hogy a mi asztalunkhoz szándékozott ülni – kérdezte álmos hangon Rozsdás. A Krokodil kissé kiengedte a fiatalember nyakát, mert nem szeretett társalgás közben gyilkolni.
– Régen keresünk már egy spiclit, aki mindent beköp. És azt hiszem, ez az itt, akit éppen megfojtok.
– Nézd, Krokodil, elismerem, hogy mindenkinek tiszteletre méltó magánügye, hogy kit fojt meg, és kit nem. De ez a fiú a mi asztalunkhoz akart ülni, mikor nyakoncsípted. Először mondja meg, amit esetleg nekünk üzentek általa, és azután, ha igazán azt hiszed, hogy rendőrkém, öld meg békességben.
– Tudod mit? Előbb megölöm, aztán beszélj vele.
– Helytelen álláspont – vetette közbe a Bunkó. – Nem hiszem, hogy a magunkévá tesszük.
– Én sem – mondta a Főorvos, és elővett egy körülbelül negyven centiméter hosszúságú kést.

(Rejtő: Elveszett cirkáló)

A konfliktus egy lehetséges feloldása lehetett volna, ha a Kölyök kikérdezését és megfojtását sikerül átírni komplex vonalintegrálokká, amelyeket aztán tetszés szerint fel lehet cserélni.

8. Függvénysorozatok, függvénysorok és paraméteres integrálok

Holomorf függvények lok. egyenletes limesze holomorf. Ugyanez sorokkal és paraméteres integrálokkal. Ha lokálisan egyenletesen korlátos függvények sorozata egy sűrű halmazon pontonként konvergens, akkor lok. egyenletesen konvergens. Vitali-Montel tétel.

Holomorf függvények egyenletes limesze

Tétel (Weierstrass)

Holomorf függvények lokálisan egyenletes limesze holomorf, avagy:
Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak és $f_n(z) \to g(z)$ lokálisan egyenletesen, akkor g holomorf és $f'_n(z) \to g'(z)$ lokálisan egyenletesen.

Emlékeztetőül, "lokálisan egyenletesen":

- Minden pontnak van olyan környezete, ahol, vagy:
- Minden kompakt részhalmazon.

Következmény

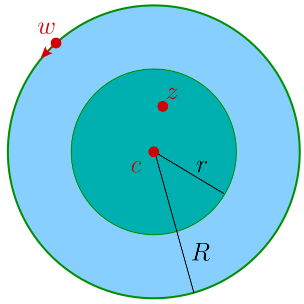
Lokálisan egyenletesen konvergens sorozatokat és sorokat akárhányszor szabad tagonként deriválni.

Bizonyítás. (a) Morera: ahhoz, hogy $g(z) = \lim f_n(z)$ holomorf legyen, elég, ha g folytonos, és bármely D-beli Δ zárt háromszöglemez kerületén 0 a vonalintegrálja.

A Δ háromszöglemez kompakt, így ezen a halmazon $f_n \to g$ egyenletesen. Folytonos függvények egyenletes limesze folytonos, ezért g is folytonos; így biztosan létezik g vonalintegrálja a háromszögvonalon.

$$\int_\Delta g(z)\mathrm{d}z = \int_\Delta \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_\Delta f_n(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

(b) Legyen $\overline{B}(c, R) \subset D$, $0 < r < R$, $z \in B(c, r)$.



Bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy $n > n_0$ esetén $\max\limits_{|w-c|=R} |f_n(w) - g(w)| < \varepsilon$.

Bármely $z \in B(c, r)$-re

$$\left|f'_n(z) - g'(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R} \frac{g(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}w\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|w-c|=R}\frac{f_n(w)-g(w)}{\big((w-c)-(z-c)\big)^2}\mathrm{d}w\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|w-c|=R}\frac{\big|f_n(w)-g(w)\big|}{\big(|w-c|-|z-c|\big)^2}|\mathrm{d}w|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{(R-r)^2}\cdot 2\pi R = \frac{R}{(R-r)^2}\cdot\varepsilon.$$

Ez minden ε-ra igaz, tehát $f_n'(z) \to g'(z)$ egyenletesen a $B(c,r)$ körben.

Tehát, minden c-nek van olyan környezete, ahol $f_n' \to g'$ egyenletesen, vagyis $f_n' \to g'$ lokálisan egyenletesen.

Példa (Riemann-zeta függvény)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (\operatorname{Re} s > 1)$$

(Hagyományosan $s = \sigma + it$)

Ha $\sigma_0 > 1$, akkor a $\sigma \geqslant \sigma_0$ félsíkban $\sum \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ közös konvergens majoráns, tehát a sor egyenletesen konvergens.

A Weierstrass-tétel szerint $\zeta(s)$ holomorf a $\sigma > 1$ nyílt félsíkban, és

$$\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\log n}{n^s}.$$

($\sigma \leqslant 1$ esetén a sor divergens.)

Paraméteres integrálok

Tétel

Legyen D tartomány, $f : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ folytonos, minden rögzített $x \in [a,b]$-re $z \mapsto f(x,z)$ holomorf. Ekkor az

$$F(z) = \int_{x=a}^{b} f(x,z)\mathrm{d}x$$

paraméteres integrál is holomorf és

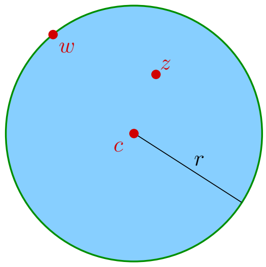
$$F'(z) = \int_{x=a}^{b} D_2 f(x,z)\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Ugyanaz, csak szumma helyett integrállal.

(a) Bármely $\Delta \subset D$ háromszöglemez körül

$$\int_{\Delta} F(z)\mathrm{d}z = \int_{z\in\Delta}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{z\in\Delta} f(x,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} 0\mathrm{d}x = 0,$$

tehát $F(z)$ holomorf.



(b) Bármely $z \in D$ pont körül egy kis, r sugarú körben

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=r} F(w)\frac{\mathrm{d}w}{(w-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=r}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,w)\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}w}{(w-z)^2}$$

$$= \int_{x=a}^{b}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=r} f(x,w)\frac{\mathrm{d}w}{(w-z)^2}\right)\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} D_2 f(x,z)\mathrm{d}x.$$

Példa (Euler-féle Gamma-függgvény)

$$\Gamma(s) = \int_{x=0}^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x \qquad (\operatorname{Re} s > 0)$$

A függvény holomorf, és

$$\Gamma'(s) = \int_{x=0}^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\log x\mathrm{d}x \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

Az előző tételt kiterjeszthetjük improprius integrálokra, vagy vehetjük a

$$\lim_{N\to\infty}\int_{x=\frac{1}{N}}^{N} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

lokálisan egyenletesen konvergens függvénysorozatot.

Pontonkénti konvergenciából egyenletes konvergencia

Lemma

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak és egyenletesen korlátosak (tehát van olyan K, hogy $|f_n(z)| \leqslant K$ minden n-re és minden $z \in D$-re), és egy sűrű $S \subset D$ halmazon $f_n(z)$ pontonként konvergens, akkor az $f_n(z)$ sorozat lokálisan egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Vegyünk egy $c \in D$ pontot és körülötte egy kört: $B(c, R+\varepsilon) \subset D$.

Legyen $r = \frac{R}{2}$ és $|f_n(z)| \leqslant K$ minden n-re és z-re.

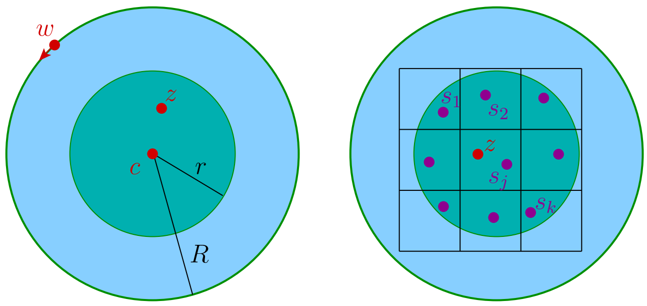
Előkészület. Bármely $z \in B(c,r)$-re és bármely $n \in N$-re

$$|f_n'(z)| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}w\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{K}{(R-r)^2}\cdot 2\pi R = \frac{4K}{R},$$

ezért bármely $z_1, z_2 \in B(c,r)$ pontokra

$$\big|f_n(z_1) - f_n(z_2)\big| \leqslant \frac{4K}{R}\cdot|z_1 - z_2|.$$

(A kis körön belül $f_1, f_2, \ldots$ egyenletesen Lipschitz.)



Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

A $B(c,r) \cap S$ halmazból válasszunk ki véges sok pontot: $s_1, \dots, s_k$-t úgy, hogy ezek ε sugarú környezetei lefedjék $B(c,r)$-et.

Van olyan n_0, hogy bármely $n, m \geqslant n_0$-ra és minden $1 \leqslant j \leqslant k$-ra $\left|f_n(s_j) - f_m(s_j)\right| < \varepsilon$. (Mindegyik j-hez van ilyen küszöb; vesszük a maximumot.)

Most tekintsünk egy tetszőleges $z \in B(c,r)$ pontot.

Ehhez van egy s_j pont, amelyre $|z - s_j| < \varepsilon$. Ezért

$$\begin{gathered} \left|f_n(z) - f_m(z)\right| \leqslant \\ \leqslant \left|f_n(z) - f_n(s_j)\right| + \left|f_m(s_j) - f_m(z)\right| + \left|f_n(s_j) - f_m(s_j)\right| \leqslant \\ < \frac{4K}{R}|z - s_j| + \frac{4K}{R}|z - s_j| + \varepsilon < 2 \cdot \frac{4K}{R}\varepsilon + \varepsilon = \left(\frac{8K}{R} + 1\right)\varepsilon. \end{gathered}$$

Tehát: Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy minden $n, m > n_0$ és bármely $z \in B(c,r)$ esetén $\left|f_n(z) - f_m(z)\right| \leqslant \left(\frac{8K}{R} + 1\right)\varepsilon$.

Az $f_n(z)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens $B(c,r)$-en.

Tétel (Vitali–Montel)

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \dots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak, és egyenletesen korlátosak, akkor ezek közül kiválasztható lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat.

V.ö. Bolzano-Weierstrass tétel: Minden korlátos számsorozatnak van konvergens részsorozata.

V.ö. Arzelà–Ascoli tétel: Ha $f_1, f_2, \dots : [a,b] \to \mathbb{R}$ egyenletesen korlátosak és egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \quad \forall x, y \in [a,b] \quad \Big(\big(|x - y| < \delta\big) \Rightarrow \big(|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\big) \Big),$$

akkor kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat.

Bizonyítás. Legyen $s_1, s_2, \dots$ egy sűrű sorozat D-ben.

A Bolzano–Weierstrass tétel miatt miatt van olyan $N_1 = (n_{1,1}, n_{1,2}, n_{1,3}, \dots)$ sorozat, amelyre az $f_{n_{1,k}}(s_1)$ sorozat konvergens.

Ennek van olyan $N_2 = (n_{2,1}, n_{2,2}, n_{2,3}, \dots)$ részsorozata, amelyre az $f_{n_{2,k}}(s_2)$ sorozat is konvergens.

Ezt ismételve kapjuk részsorozatok egy sorozatát; minden ℓ-re az $f_{n_{\ell,k}}(s_\ell)$ sorozat konvergens.

Átlósan kiválasztjuk az $n_{k,k}$ elemeket.

$$\begin{array}{cccccc} N_1\!: & n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} & n_{1,4} & \dots \\ N_2\!: & n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} & n_{2,4} & \dots \\ N_3\!: & n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} & n_{3,4} & \dots \\ N_4\!: & n_{4,1} & n_{4,2} & n_{4,3} & n_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Az $(n_{1,1}, n_{2,2}, n_{3,3}, \ldots)$ sorozat mindegyik N_j-nek részsorozata az első néhány elem kivételével, ezért bármelyik ℓ-re az $f_{n_{k,k}}(s_\ell)$ sorozat konvergens.

Tehát, az $f_{n_{k,k}}(z)$ sorozat egyenletesen korlátos és az $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ sűrű halmazon pontonként konvergens, tehát a Lemma miatt a teljes D tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

9. Hatványsorba fejtés

Együtthatóformula. Hatványsorba fejtés. Középérték-tulajdonság. Parseval-formula hatványsorokra. $\log(1+z)$ és $(1+z)^a$ hatványsora.

Lemma

Bármely $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C}$ és $r > 0$ esetén

(a)
$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\,|\mathrm{d}z| = \begin{cases}1 & \text{ha } k=0\\ 0 & \text{ha } k\neq 0\end{cases}$$

(b)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\mathrm{d}z = \begin{cases}1 & \text{ha } k=-1\\ 0 & \text{ha } k\neq -1\end{cases}$$

Bizonyítás. A kettő ugyanaz, mert $\mathrm{d}\big(\arg(z-c)\big) = \dfrac{|\mathrm{d}z|}{r} = \dfrac{\mathrm{d}z}{i(z-c)}$. Helyettesítés: $z - c = re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

(a)
$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\,|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(re^{it})^k\cdot r\mathrm{d}t = \frac{r^k}{2\pi r}\int_0^{2\pi} re^{kit}\mathrm{d}t = \begin{cases}1 & \text{ha } k=0\\ 0 & \text{ha } k\neq 0\end{cases}$$

(b)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(re^{it})^k\cdot ire^{it}\mathrm{d}t = \frac{r^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(k+1)it}\mathrm{d}t = \begin{cases}1 & \text{ha } k+1=0\\ 0 & \text{ha } k+1\neq 0\end{cases}$$

Vagy: $k \neq -1$ esetén van primitív függvény, a $\dfrac{z^{k+1}}{k+1}$. A $k=-1$ esetben $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\dfrac{\mathrm{d}z}{z-c} = 1$.

Tétel (együtthatóformula)

Ha a $B(c,R)$ körlapon
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,$$
akkor
$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{k+1}}\mathrm{d}w \qquad \text{minden } k\text{-ra és } 0<r<R\text{-re.}$$

Bizonyítás.
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{k+1}}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(w-c)^n}{(w-c)^{k+1}}\mathrm{d}w$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(w-c)^{n-k-1}\right)\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}(w-c)^{n-k-1}\mathrm{d}w\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\left.\begin{cases}1 & \text{ha } n-k-1=-1\\ 0 & \text{ha } n-k-1\neq -1\end{cases}\right\} = a_k.$$

Taylor-együttható, együtthatóformula és Cauchy-formula

Ha a $B(c, R)$ körlapon $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad \text{(Taylor-együttható)}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} \mathrm{d}z \qquad \text{(Együtthatóformula)}$$

$$\frac{f^{(k)}(c)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} \mathrm{d}z \qquad \text{(Cauchy-formula)}$$

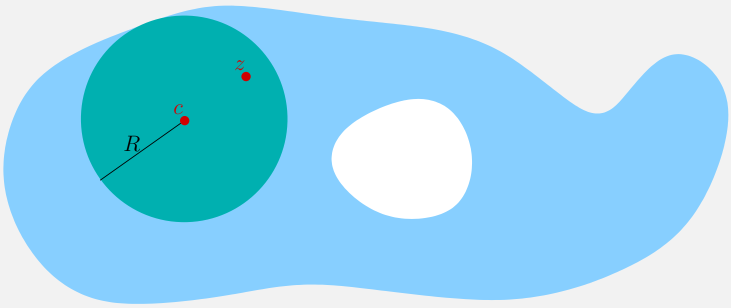
Tétel (hatványsorba fejtés)

Ha f holomorf a $B(c, R)$ körlapon, akkor ezen a körlapon a függvény hatványsorba fejthető,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

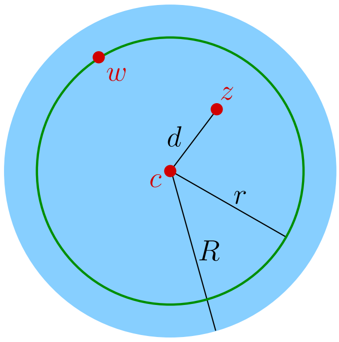
ahol

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} \mathrm{d}w \qquad \text{bármely } 0 < r < R\text{-re.}$$



Bizonyítás.

Legyen $z \in B(c,R)$, $d = |z-c| < r < R$,
$M = \max\limits_{|w-c|=r} |f(w)|$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)-(z-c)}\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-c}{w-c}}\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n\right)\mathrm{d}w = \qquad \left|\frac{z-c}{w-c}\right| = \frac{d}{r} < 1$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)\cdot(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\right)\mathrm{d}w$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\max_{w}\left|\frac{f(w)\cdot(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{r}\left(\frac{d}{r}\right)^n < \infty$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)\cdot(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-c)^n.$$

Definíció

$f : D \to \mathbb{C}$ *analitikus*, ha D bármely pontja körül valamekkora körben hatványsorba fejthető.

Tétel

$f : D \to \mathbb{C}$ akkor és csak akkor analitikus, ha holomorf.

Bizonyítás. $\Rightarrow$ A hatványsor összegfüggvénye holomorf.

$\Leftarrow$ Minden holomorf függvény bármely c pont körül hatványsorba fejthető, a maximális c középű körlapon.

Tétel (középérték-tulajdonság)

Ha $f(z)$ holomorf a $\overline{B}(c,R)$ zárt körlapon (tehát holomorf egy kicsivel nagyobb körben), akkor

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z| = f(c)$$

vagyis $f(z)$ átlaga a körvonalon megegyezik a középpontban felvett értékkel.

Bizonyítás. Legyen $f(z)$ c körüli hatványsora $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$.

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)|\mathrm{d}z| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} (z-c)^n \, |\mathrm{d}z| \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \begin{Bmatrix} 1 & \text{ha } n = 0 \\ 0 & \text{ha } n > 0 \end{Bmatrix} = a_0 = f(c).$$

Tétel (Parseval-formula hatványsorokra)

Ha $f(z)$ holomorf a $\overline{B}(0,r)$ zárt körlapon (tehát holomorf egy kicsivel nagyobb körben), és a 0 körüli hatványsora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, akkor

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Az $r = 1$ esetben

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \cdot \overline{f(re^{it})} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} (re^{-it})^m \right) \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(a_n \overline{a_m} r^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(n-m)it} \mathrm{d}t \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \begin{Bmatrix} 1 & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Parseval-formula vs. Pitagorasz-tétel

Az egységkörvonalon

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} f \cdot \overline{g} \, |\mathrm{d}z|$$

egy skaláris szorzás, erre nézve

$$1, z, z^2, \ldots, \frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \ldots$$

ortonormáltak.

Példa

$f(z) = \log(1+z)$ holomorf az egységkörben, $f(0) = 0$,

$$f^{(k)}(z) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+z)^k}, \qquad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

a Taylor sor előállítja a függvényt az egységkörben:

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k.$$

Tétel (binomiális sor)

Legyen $a \in \mathbb{C}$,
$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k \quad \text{ha } |z| < 1$$
(Azt a hatványfüggvényt vesszük, amelyre $1^a = 1$.)

Bizonyítás. Az $f(z) = (1+z)^a = e^{a \log(1+z)}$ függvény holomorf az egységkörben,
$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \frac{a(a-1)...(a-k+1)(1+z)^{a-k}}{k!} = \binom{a}{k}(1+z)^{a-k}, \qquad \frac{f^k(0)}{k!} = \binom{a}{k};$$
A 0 körüli hatványsor
$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k \qquad (|z| < 1).$$

Példa (IMO Shortlist 2006/A2)

Definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ valós számsorozatot a következő rekurzióval:
$$a_0 = -1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{for} \quad n \geqslant 1.$$
Mutassuk meg, hogy $a_n > 0$ minden $n \geqslant 1$-re.

Megoldás komplex függvénytani eszközökkel:

Gyors felső becslés: $|a_n| = \left| - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k}|$; trivi indukcióval $|a_n| \leqslant 2^n$.

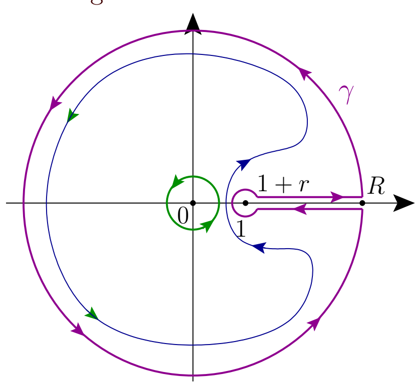
Legyen $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; ez $|z| < \frac{1}{2}$-re biztosan konvergens. A rekurzió azt jelenti, hogy
$$-1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} = G(z) \cdot \frac{-\log(1-z)}{z};$$
$$G(z) = \frac{z}{\log(1-z)}, \qquad G(0) = -1.$$

Ennek a függvénynek a hatványsora érdekel minket.

Megpróbálhatjuk kiszámolni a Taylor-együtthatókat... ehhez k-szor deriválni kell a 0-ban. (Hajrá.)

Vagy, írjuk fel inkább együtthatóformulát.

Kör helyett ezen a "kulcslyukgörbén" integrálunk:



$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{G(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^n \log(1-z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^n \log(1-z)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1+r}^{R}\frac{dx}{x^n\big(\log(x-1)-\pi i\big)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{1+r}^{R}\frac{dx}{x^n\big(\log(x-1)+\pi i\big)}$$

$$+ O\left(r\cdot\log\frac{1}{r}\right) + O\left(R\cdot\frac{1}{R^n\log R}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1+r}^{R}\frac{2\pi i\cdot \mathrm{d}x}{x^n\big(\log(x-1)-\pi i\big)\big(\log(x-1)+\pi i\big)} + O\left(r\cdot\log\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{R^{n-1}\log R}\right)$$

$$= \int_{1+r}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x^n\big(\log^2(x-1)+\pi^2} + O\left(r\cdot\log\frac{1}{r}\right) + O\left(R\cdot\frac{1}{R^n\log R}\right)$$

Ha $r\to 0$ és $R\to\infty$:

$$a_n = \int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n\big(\pi^2+\log^2(x-1)\big)} > 0.$$

10. A hatványsorba fejtés következményei

Gyöktényezők kiemelése, gyök multiplicitása. Unicitástétel. Lokális aszimptotikus viselkedés. Maximum-elv.

Tétel (a gyöktényező kiemelhető)

Legyen $f(z)$ holomorf a c pontban, a c körüli hatványsora $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$.

Ezek ekvivalensek:

(a) $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0$;

(b) $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$;

(c) $f(z) = (z-c)^m \cdot g(z)$ egy c-ben holomorf $g(z)$ függvénnyel.

Bizonyítás. $(a) \Leftrightarrow (b)$, mert $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$;

$(b) \Leftrightarrow (c)$ a $g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k(z-c)^{k-m}$ függvénnyel.

Definíció

Legyen $f(z)$ holomorf a c pontban, a c körüli hatványsora $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$.

Azt mondjuk, hogy az $f(z)$-nek a c pont m-szeres gyöke, ha:

(a) $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0$ és $f^{(m)}(c) \neq 0$, avagy

(b) $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ és $a_m \neq 0$, avagy

(c) $f(z) = (z-c)^m \cdot g(z)$ egy c-ben holomorf $g(z)$ függvénnyel, és $g(c) \neq 0$.

Tétel (unicitástétel; [unicitás=egyértelműség])

Legyen D tartomány, $f, g, h : D \to \mathbb{C}$ holomorf, $z_1, z_2, \ldots \in D$ olyan konvergens sorozat, hogy $z_n \to \zeta \in D$ és $z_n \neq \zeta$.

(a) Ha $f(z_n) = 0$ minden n-re, akkor f az egész D-n konstans 0.

(b) Ha $g(z_n) = h(z_n)$ minden n-re, akkor $g = h$ az egész D-n.

Avagy, a függvény értékei bármelyik, D belsejében torlódó sorozat mentén meghatározzák a függvényt; bármely értéksorozathoz legfeljebb egy függvény létezik.

Bizonyítás. Elég az (a) állítást igazolni, ebből a (b) állítás az $f = g - h$ választással következik.

Legyen $Z = \{w \in D : f(w) = 0\}$ az f gyökeinek halmaza;
$Z_1 = Z' \cap D$, a gyökök D-beli torlódási pontjainak halmaza.
A feltétel szerint $\lim z_n \in Z_1$, tehát Z_1 nemüres.

Az f folytonos, ezért a gyökök torlódási pontjai is gyökök: ha $w_1, w_2, \ldots$ gyökök és $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \in D$, akkor

$$f\Big(\lim_{n\to\infty} w_n\Big) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ezért $Z_1 \subset Z$.

A Z_1 halmaz D-ben relatív zárt, mert Z' zárt (torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont).

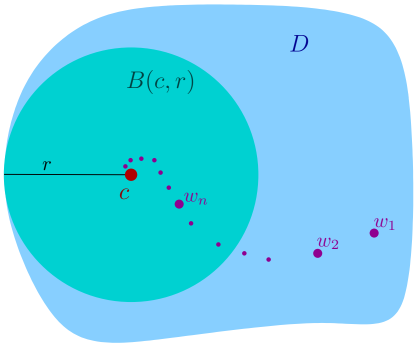
Meg fogjuk mutatni, hogy Z_1 nyílt is.

Állítás: Z_1 nyílt, vagyis $\forall c \in Z_1\ \exists r > 0\ B(c, r) \subset Z_1$.

Vegyünk egy tetszőleges $c \in Z_1$ pontot; a c körül a maximális $B(c, r)$ körben legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$.

Azt akarjuk igazolni, hogy $a_0 = a_1 = \ldots = 0$; ha ez igaz, akkor $B(c, r)$-ben f konstans 0, a körben minden pont gyök, és minden pont gyökök torlódási pontja, és így $B(c, r) \subset Z_1$.

Indukció. Legyen a_m az első olyan együttható, amiről még nem bizonyítottuk, hogy 0, tehát $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ már megvan, és vizsgáljuk a_m-et. (Ha $m = 0$, akkor a feltétel üres.)



Mivel c torlódási pontja Z-nek, vannak olyan $w_1, w_2, \ldots \in Z$ pontok, hogy $w_n \neq c$ és $w_n \to c$.

A $g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k(z-c)^{k-m} = \dfrac{f(z)}{(z-c)^m}$ függvény szintén holomorf a $B(c, r)$ körben, folytonos c-ben, és $g(w_n) = \dfrac{f(w_n)}{(w_n - c)^m} = 0$. Tehát,

$$a_m = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(w_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ezek után Z_1 az összefüggő nyílt D-nek nemüres, egyszerre nyílt és relatív zárt része, tehát a teljes D, de akkor $D = Z_1 \subset Z \subset D$ miatt $Z = D$, vagyis f konstans 0.

Következmény (végtelen rendben eltűnő függvény)

Legyen $f(z)$ holomorf a D tartományon.
Ha valamely pontban $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = 0$, akkor f konstans 0.

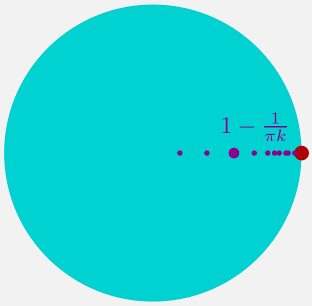
Bizonyítás. Ha $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = 0$, akkor f c körüli hatványsora a konstans 0; a konvergenciakörben, majd a teljes tartományon a függvény konstans 0.

Következmény

Ha $f(z)$ holomorf, nem konstans a D tartományon, akkor az f minden gyökének véges a multiplicitása.

Kérdés

Legyen az egységkörben $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$.
A függvény gyökei $1 - \frac{1}{k\pi}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.



Miért nem mond ez ellent az unicitástételnek?

Válasz: Végtelen sok gyök van, de csak a határhoz torlódnak.

Azonosságok, még egyszer

Az unicitástétel segítségével bizonyítás nélkül átvihetjük a valósból ismert azonosságokat komplexre.

Például a valós számok körében $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$; ez automatikusan érvényes marad a komplex számok körében is; az egyetlen apró technikai gond, hogy itt kétváltozós komplex függvényekről van szó. Ezen úgy segíthetünk, hogy két lépésben, egyesével cseréljük a valós változókat komplexre.

Először rögzítsük az x valós számot, az y helyére írjuk a w komplex változót és tekintsük az

$$\sin(x+w) \overset{?}{=} \sin x \cos w + \cos x \sin w \tag{1}$$

egyenletet. Mindkét oldalon a w változó egy-egy egészfüggvénye áll, és az w valós értékeire az egyenlet teljesül. A valós w értékek persze torlódnak a sík belsejében, tehát az unicitástétel szerint a két függvény ugyanaz; az (1) egyenlet minden komplex w-re teljesül.

Most pedig rögzítsük a w komplex számot, és cseréljük ki az eddigi valós x-et egy z komplex változóra:

$$\sin(z+w) \overset{?}{=} \sin z \cos w + \cos z \sin w. \tag{2}$$

Most is a két oldal egy-egy egészfüggvénye z-nek, és láttuk, hogy a két oldal egyenlő a z bármely valós értéke esetén. Az unicitástételt újra alkalmazva azt kaptuk, hogy a (2) minden komplex z-re igaz.

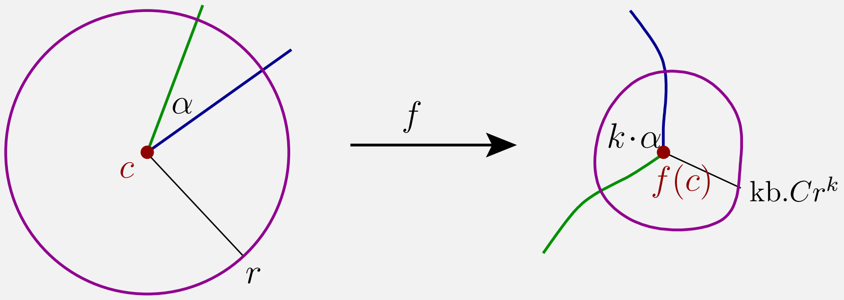
Érdemes elgondolkodni azon, hogy ez a módszer mennyiben használható a logaritmus és az exponenciális függvények esetében. A logaritmus esetében maga a függvény létezése a gond, a $\log(zw) = \log z + \log w$ egyenletet nem tudjuk elég sok z, w párra értelmezni.

Következmény (lokális aszimptotikus viselkedés)

Legyen $f(z)$ holomorf a c pontban, $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0$ és $f^{(k)}(c) \neq 0$.
A hatványsorba fejtés miatt a c közelében

$$f(z) - f(c) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \cdot (z-c)^k + O\big(|z-c|^{k+1}\big),$$

tehát a függvény kicsiben körtartó, de nem szögtartó: a c csúcsú szögeket k-val megszorozza.



Tétel (maximum-elv)

Ha $f(z)$ holomorf, nem konstans a D tartományon, akkor:

(a) $\big|f(z)\big|$-nek nem létezik lokális maximuma.

(b1) Ha $z_1, z_2, \ldots \in D$, $\lim z_n = w$, és $|f(z_n)| \to \sup |f|$, akkor w a D határán van.

(b2) Ha D korlátos, és f folytonos a D lezártján, akkor $|f|$ a maximumát csak a határon veszi fel.

Bizonyítás. Ha $c \in D$, és $\overline{B}(c,r) \subset D$, akkor a középérték-tulajdonság szerint

$$f(c) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z|;$$

$$\big|f(c)\big| = \left|\frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z|\right| \leqslant \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} \big|f(z)\big| \cdot |\mathrm{d}z| \leqslant \max_{|z-c|=r} \big|f(z)\big|.$$

Egyenlőség csak akkor lehetne, ha f iránya és nagysága is állandó lenne a körvonalon; de akkor az unicitástétel miatt f konstans lenne.

Tehát, akármilyen kicsi r-re

$$\big|f(c)\big| < \max_{|z-c|=r} \big|f(z)\big|;$$

az $|f|$-nek nem lehet lokális maximuma c-ben.

Ugyanez Parseval-formulával:

Legyen c körül $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$.
Mivel f nem konstans, az $a_1, a_2, \ldots$ együtthatók nem mind nullák.

$$|f(c)|^2 = |a_0|^2 < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big|f(c + re^{it})\big|^2 \mathrm{d}t \leqslant \Big(\max_{|z-c|=r} \big|f(z)\big|\Big)^2,$$

tehát

$$|f(c)| < \max_{|z-c|=r} |f(z)|.$$

Kérdés (Van-e minimum-elv?)

- Ha $f(c) = 0$, akkor $|f(z)|$-nek c lokális minimumhelye.
- Ha $f(c) \neq 0$, és c az $|f(z)|$-nek lokális minimumhelye, akkor c az $|1/f(z)|$-nek lokális maximumhelye, tehát f konstans.

Ha f-nek nincs gyöke, akkor van minimum-elv is.

Tétel (Schwarz-lemma)

Ha $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ holomorf és $f(0) = 0$, akkor

(a) $|f'(0)| \leqslant 1$;

(b) $z \neq 0$ esetén $|f(z)| \leqslant |z|$;

(c) Ha az fentiekben egyetlen pontban is egyenlőség van, akkor $f(z)$ egy 0 körüli forgatás: $f(z) = cz$ valamilyen $|c| = 1$-gyel.

Bizonyítás. Az f-nek a 0 gyöke, tehát $f(z) = g(z) \cdot z$ valamilyen holomorf g függvénnyel.
A 0-ban $f'(0) = g(0)$; azt kell igazolni, hogy $|g| \leqslant 1$.

Legyen $z_1, z_2, \ldots \in \mathbb{D}$ olyan pontok, hogy $|g(z_n)| \to \sup |g|$. Ha g nem konstans, akkor a maximum-elv miatt $|z_n| \to 1$. Ha g konstans, akkor mi választjuk a pontokat így.

$$1 \geqslant |f(z_n)| = |g(z_n)| \cdot |z_n| \to \sup |g| \cdot 1 = \sup |g|$$

Tehát az egész körlapon $|g| \leqslant 1$.

Ha (a)-ban vagy (b)-ben, bármelyik belső pontban egyenlőség van, akkor ott $|g| = 1$. Az maximum-elv szerint ez csak úgy lehet, ha g konstans, $g(z) = c$; ez a konstans persze egységnyi, és akkor $f(z) = cz$ egy forgatás.

11. Egészfüggvények

Együtthatóbecslés. Liouville-tétel. Nem konstans egészfüggvény értékkészlete sűrű. Kis Picard-tétel (csak kimondani). A polinomok jellemzése nagyságrendekkel. Bizonyítás az algebra alaptételére.

Lemma (együtthatóbecslés)

Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ egészfüggvény, és legyen bármely $r > 0$-ra

$$M(r) = \max_{|z|=r} \big|f(z)\big|.$$

Ekkor bármely n indexre és $r > 0$ esetén

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

Bizonyítás. Együtthatóformula, majd triviális becslés:

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z\right| \leqslant \max_{|z|=r}\left|\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \cdot 2\pi r \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M(r)}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}.$$

Vagy, a Parseval-formulából:

$$|a_n|^2 r^{2n} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|f(re^{it})\big|^2 \mathrm{d}t \leqslant M(r)^2.$$

Tehát $|a_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$.

Tétel (Liouville-tétel)

Ha egy egészfüggvény korlátos, akkor konstans.

Bizonyítás. Legyen a 0 körüli hatványsor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a korlát $|f(z)| \leqslant M$. Az együttható-becslés szerint $r > 0$-ra és $n \geqslant 1$-re

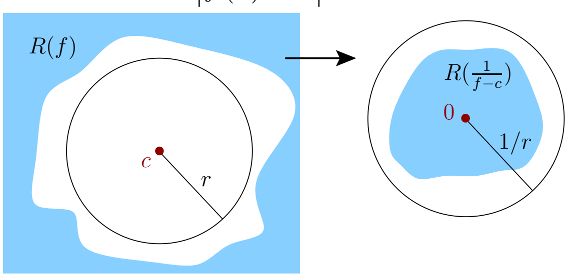
$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

Az $r \to \infty$ határátmenetből azt kapjuk, hogy bármely $n \geqslant 1$-re $|a_n| = 0$, tehát f konstans.

Következmény

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor az értékkészlete sűrű $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy az értékkészlet nem sűrű, vagyis van egy $B(c, r)$ kör, amelyben a függvény nem vesz fel értéket: $\big|f(z) - c\big| \geqslant r$ minden z-re.



Legyen $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - c}$; ez egy egészfüggvény és

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - c|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

A Liouville-tétel miatt $g(z)$ konstans, de akkor $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + c$ is konstans.

Tétel (kis Picard-tétel)

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor legfeljebb egy kivétellel minden komplex értéket felvesz.

A tételt később bizonyítjuk.

Példák

- Az lehetséges, hogy egy egészfüggvény nem vesz fel minden komplex számot; például az e^z értékkészlete $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
- A $\sin z$ függvény minden értéket felvesz, az értékkészlete a teljes $\mathbb{C}$.

A Liouville-tétel tovább erősíthető:

Tétel

Ha $f(z)$ egészfüggvény és $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$, akkor $f(z)$ konstans.

Bizonyítás. Legyen a 0 körüli hatványsor $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. $n \geqslant 1$ és $r > 1$ esetén

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \leqslant \frac{M(r)}{r}; \to 0 \quad \text{ha } r \to \infty.$$

Tétel (a polinomok jellemzése a nagyságrendjükkel)

Ha $f(z)$ egészfüggvény, és $\lim_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z^{n+1}} = 0$, akkor $f(z)$ egy legfeljebb n-edfokú polinom.

Bizonyítás. Legyen a 0 körüli hatványsor $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Az együtthatóbecslés szerint $r > 1$-ra és $k \geqslant n + 1$-re

$$|a_k| \leqslant \frac{M(r)}{r^k} \leqslant \frac{M(r)}{r^{n+1}} \to 0 \quad \text{ha } r \to \infty.$$

Tehát, $|a_k| = 0$ minden $k = n+1, n+2, \ldots$-re, vagyis $f(z)$ legfeljebb n-edfokú polinom.

Tétel (az algebra alaptétele)

Minden nem konstans komplex polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás. Átfogalmazva: Ha egy polinomnak nincs gyöke, akkor konstans.

Tegyük fel, hogy $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ polinom, $a_n \neq 0$ és nincs gyöke.

Vizsgáljuk az $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ egészfüggvényt.

Az f folytonos, és véges határértéke van ∞-ben:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right)} = \begin{cases} \frac{1}{a_n} & \text{ha } n = 0 \\ 0 & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

ezért f korlátos. A Liouville-tétel miatt f konstans, tehát p is konstans, kész.

Ugyanez a bizonyítás, Liouville-tétel helyett maximum-elvvel:

Ha $p(z)$ nem konstans, vagyis $n > 0$, akkor $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$. A $|p(z)|$-nek van abszolút minimuma. Ez egyben lokális minimum is, vagyis ott a függvényérték 0.

Riói élmény: Konstans Benzsi Intézet

Konstansokról és nemkonstansokról nem csak tételek szólnak...

(Bentlakásos iskola látássérülteknek)

12. Laurent-sorok

Laurent-sorok konvergenciája. Kapcsolat a Fourier-sorokkal. Együtthatóformula. Egyértelműség. Laurent-sorba fejtés. Rac.tört függvények Laurent-sorba fejtése. A $\operatorname{ctg} z$ függvény 0 körüli Laurent-sorának első három tagja. Parseval-formula.

Definíció

Az $f(z)$-nek a c pontban *izolált szingularitása* van, ha f holomorf a c egy $\dot{B}(c,r)$ pontozott környezetében, de nem értelmes c-ben.

Az ilyen pontok körül is szeretnénk függvényt a vizsgálni, erre a hatványsor nem elég.

Példák

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots$$
$$\frac{\cos z}{z^5} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z} - \frac{z}{720} + - \ldots$$

A példák alapján érdemes lehet a hatványsorokat negatív kitevőjű tagokkal kiegészíteni. Most az ilyenfajta sorokat vizsgáljuk meg közelebbről.

Definíció (Laurent-sor)

- c **körüli Laurent-polinom:**

$$\sum_{n=-M}^{N} a_n(z-c)^n = a_{-M}(z-c)^{-M} + a_{-M+1}(z-c)^{-M+1} + \ldots + a_N(z-c)^N$$

- c **körüli Laurent-sor:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n =$$
$$= \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \ldots =$$
$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}}_{\textit{szinguláris rész}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n}_{\textit{holomorf rész}}$$

  – A Laurent-sor konvergens, ha a holomorf és a szinguláris rész is konvergens (hasonlóan az $\int_{-\infty}^{\infty}$ alakú improprius integrálokhoz).

  – Ha $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$, akkor a sort hatványsornak tekintjük; a c-beli érték az a_0.

Fourier-sor vs. Laurent-sor

A Fourier-sorok klasszikus alakja

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big);$$

az Euler-féle azonosságokkal átírhatjuk ebbe az alakba:

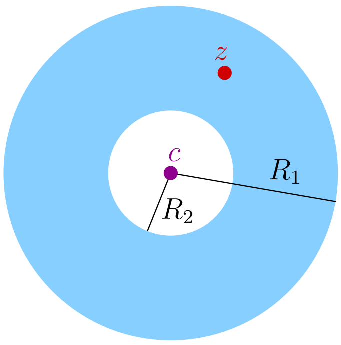
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n \cdot it},$$

ahol $a_0 = c_0$, és $n > 0$ esetén $a_n = c_n + c_{-n}$ és $b_n = (c_n - c_{-n})i$.
A $z = e^{it}$ helyettesítéssel

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

vagyis a Fourier-sor olyan Laurent-sor, amit nem a 0 középpont közelében, hanem az egységkörvonalon vizsgálunk.

A Laurent-sor konvergenciatartománya



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

- A sor holomorf része, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ egy hatványsor, ez valamilyen, c középpontú, $0 \leqslant R_2 \leqslant \infty$ sugarú *kör belsejében* lokálisan egyenletesen abszolút konvergens, a kör külsejében divergens. (A határral most sem foglalkozunk.)

- A sor szinguláris része, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ egy hatványsor, amelybe $\frac{1}{z-c}$-t helyettesítettünk; ez meg valamilyen, c középpontú, $0 \leqslant R_1 \leqslant \infty$ sugarú *kör külsejében* lokálisan egyenletesen abszolút konvergens, belül divergens.

- Lehetséges $R_1 > R_2$ is, de a számunkra érdekes eset, ha $R_1 < R_2$; ilyenkor a konvergenciahalmaz egy *körgyűrű*.

  - Ha a belső sugár 0, akkor csak a c pont hiányzik.
  - Ha a külső sugár ∞, akkor nincs is külső kör.

- Az egyenletes konvergencia miatt a sor mindkét fele egy-egy holomorf függvényhez konvergál, avagy, az első fele egy hatványsor, a másik fele pedig egy hatványsor és az $\frac{1}{z-c}$ függvény kompozíciója, tehát a második fele is holomorf. Tehát, a Laurent-sor összegfüggvénye holomorf.

Példák

Laurent-sor	R_1	R_2	konvergenciatartomány
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	0	∞	$0 < \lvert z\rvert < \infty$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n}$	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2} < \lvert z-1\rvert < 3$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$	2	1	$\varnothing$

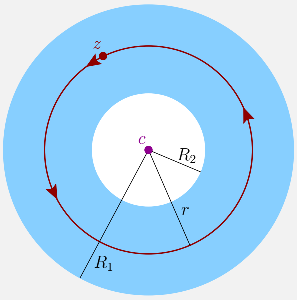
Tétel (együtthatóformula)

Tegyük fel, hogy az $R_1 < |z-c| < R_2$ körgyűrűn

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Ekkor bármely $R_1 < r < R_2$ és $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} \mathrm{d}z.$$



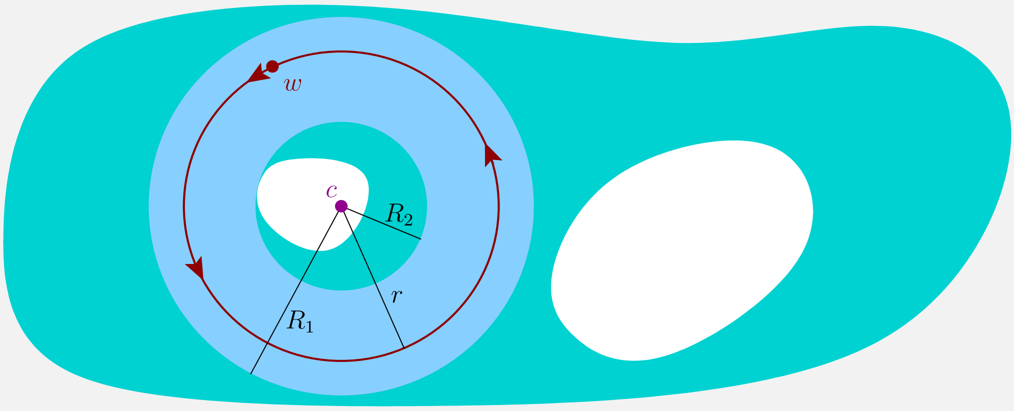
Következmény

A Laurent-sor egyértelmű.

Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)^{k+1}} \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w-c)^n}{(w-c)^{k+1}} \mathrm{d}w$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w-c)^{n-k-1} \right) \mathrm{d}w$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} (w-c)^{n-k-1} \mathrm{d}w \right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \begin{Bmatrix} 1 & \text{ha } n-k-1 = -1 \\ 0 & \text{ha } n-k-1 \neq -1 \end{Bmatrix} = a_k.$$

Tétel (Laurent-sorba fejtés)



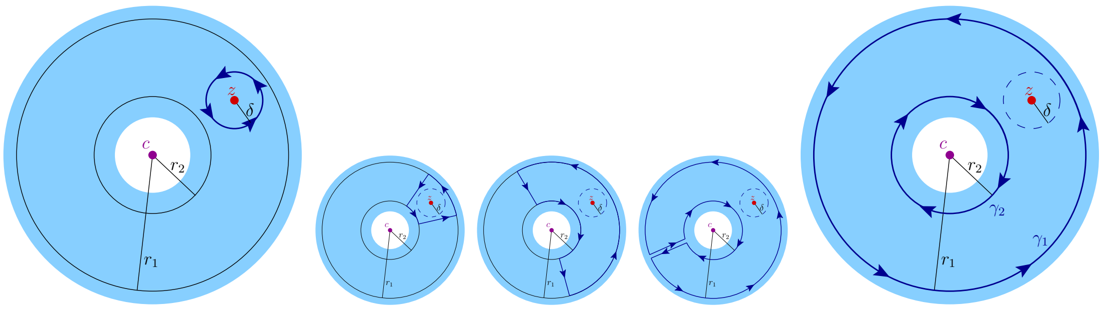
Ha f holomorf a $R_1 < |z-c| < R_2$ körgyűrűn, akkor a c körül a függvény Laurent-sorba fejthető ezen a halmazon:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n, \qquad \text{ha } R_1 < |z-c| < R_2,$$

és az együtthatók:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w \qquad \text{bármely } R_1 < r < R_2\text{-re.}$$

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges z pontot a gyűrűből. A z körül egy kicsi $\delta > 0$ sugarú körön írjuk fel a Cauchy-formulát. Legyen r_1 és r_2 két sugár, $R_1 < r_1 < |z-c| - \delta$ és $|z-c| + \delta < r_2 < R_2$. A kis kört átnyomorgatjuk az r_1 sugarú, negatív irányítású γ_1 kör és az r_2 sugarú, pozitív irányítású γ_2 kör uniójává.



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=\delta} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w.$$

Másképpen: Felírjuk az általános Cauchy-formulát a két új körből álló rendszerre: Bármilyen, a körgyűrű külsejében felvő pontra, a két kör indexének összege 0, tehát

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \big(n(z,\gamma_1) + n(z,\gamma_2)\big)\cdot f(z) = 1 \cdot f(z).$$

A nagyobbik körön $\left|\frac{z-c}{w-c}\right| = \frac{|z-c|}{r_2} < 1$. A második vonalintegrál:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(w-c)-(z-c)}\mathrm{d}w = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(w-c)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-c}{w-c}}\mathrm{d}w = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(w-c)}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n\right)\mathrm{d}w = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(z-c)^n.\end{aligned}$$

Ez lesz a Laurent-sor holomorf része.

A kisebbik körön $\left|\frac{w-c}{z-c}\right| = \frac{r_1}{|z-c|} < 1$. Az első vonalintegrál:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{z-w}\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(z-c)-(w-c)}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(z-c)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{w-c}{z-c}}\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(z-c)}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-c}{z-c}\right)^k\right)\mathrm{d}w = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}f(w)(w-c)^k\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^{-k-1} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}a_n\cdot(z-c)^n.\end{aligned}$$

Ez pedig a Laurent-sor szinguláris része, kész.

Megjegyzés

Azonos középpontú, de különböző körgyűrűkön lehet különböző a Laurent-sor.

Ha $|z| < 1$, akkor

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots;$$

Ha viszont $|z| > 1$, akkor

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots .$$

Az $f(z) = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{2-z}$ függvény Laurent-sorai

$\lvert z\rvert < 1$	$1 < \lvert z\rvert < 2$	$2 < \lvert z\rvert$
$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{-1}{z^m}$	$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-1-2^{m-1}}{z^m}$

Program: Racionális tört függvények Laurent-sorba fejtése

Példa: Fejtsük Laurent-sorba az $f(z) = \dfrac{z^4+z+1}{z^3+z^2}$ függvényt az 1 körül, az $1 < |z-1| < 2$ gyűrűn.

1. Maradékosan osztunk, a maradékot parciális törtekre bontjuk:

$$f(z) = z - 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1}$$

2. A magasabb fokú törtek deriváltak:

$$... = z - 1 - \left(\frac{-1}{z}\right)' + \frac{1}{z+1}.$$

3. "Becsempésszük" a középpontot, vagyis átírjuk $(z-1)$-gyel:

$$... = (z-1) - \left(\frac{1}{1+(z-1)}\right)' + \frac{1}{(z-1)+2}$$

4. Minden nevezőből kiemeljük a nagyobb tagot:

$$... = (z-1) - \left(\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}\right)' + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

5. Átírjuk mértani sor összegévé:

$$... = (z-1) - \left(\frac{1}{z-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-1}\right)^k\right)' + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n$$

6. Rendezzük, csoportosítjuk:

$$... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{(z-1)^{k+2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n.$$

Példa

A 0 körül, a $0 < |z| < \pi$ körben, írjuk fel $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sorának első néhány tagját. Ha $|z|$ kicsi, akkor

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} &= \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)}{z\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + O(|z|^6)\right)} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)\right) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + O(|z|^6)\right)} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + O(|z|^6)\right)^k \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120}\right) + \left(\frac{z^2}{6}\right)^2 + O(|z|^6)\right) \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)\right) \cdot \left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + O(|z|^6)\right) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + O(|z|^5).
\end{aligned}$$

Tétel (Parseval-formula Laurent-sorokra)

Ha $f(z)$ holomorf a $|z| = r$ körvonalon (tehát holomorf egy kicsivel nagyobb körgyűrűn), és itt a 0 körüli Laurent-sora $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Az $r = 1$ esetben

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \cdot \overline{f(re^{it})} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (re^{it})^n \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{a_m} (re^{-it})^m \right) \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(a_n \overline{a_m} r^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(n-m)it} \mathrm{d}t \right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \begin{Bmatrix} 1 & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

13. Izolált szingularitások

Izolált szingularitások osztályozása. A megszüntethető szinularitások, pólusok és lényeges szingularitások jellemzése. Az $e^{1/z}$ viselkedése a 0 közelében. Casorati-Weierstrass tétel. Nagy Picard tétel (csak kimondani). Viselkedés a ∞-ben.

Definíció

Az $f(z)$-nek a c pontban "izolált szingularitása" van, ha f holomorf a c egy $\dot{B}(c,r)$ pontozott környezetében, de nem értelmes c-ben. Ezen belül:

- Az $f(z)$-nek a c pontban "megszüntethető szingularitása" van, ha van olyan, c-ben holomorf $g(z)$ függvény, amelyre (c kivételével) $f(z) = g(z)$.
  Ha $f(z)$-nek megszüntethető szingularitása van, akkor azt is szokás mondani, hogy $f(z)$ "holomorf" c-ben.
- Az $f(z)$-nek a c pontban "m-edrendű pólusa" van, ha $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$, ahol m pozitív egész, $g(z)$ holomorf c-ben és $g(c) \neq 0$.
- Az $f(z)$-nek a c pontban "lényeges szingularitása" van, ha c nem megszüntethető szingularitás, és nem is pólus.

Példa.

- *A* $\dfrac{\sin z}{z}$ *függvénynek megszüntethető szingularitása van a* 0*-ban.*
- *A* $\operatorname{ctg} z$ *függvénynek elsőrendű pólusa van a* π *többszöröseiben.*
- *Az* e^{1/z^4} *függvénynek lényeges szingularitása van a* 0*-ban.*

Megszüntethető szingularitások

Tétel (megszüntethető szingularitások jellemzése)

Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek izolált szingularitása van a c pontban, és a c egy pontozott környezetében a Laurent-sorba fejtése

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Ezek az állítások ekvivalensek:

(a) Az $f(z)$-nek a c pontban megszüntethető szingularitása van.

(b) $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$.

(c) $\lim_{z \to c} f(z)$ létezik és véges.

(d) A c egy pontozott környezetében $f(z)$ korlátos.

(e) $\lim\limits_{z \to c} \big((z-c) \cdot f(z)\big) = 0$.

Bizonyítás. (a)$\Leftrightarrow$(b), mert a hatványsor lesz a Laurent-sor és fordítva.

(a)⇒(c)⇒(d)⇒(e) triviális.

(e)⇒(b): Legyen k tetszőleges pozitív egész; megmutatjuk, hogy $a_{-k} = 0$.

Veszünk egy elég kicsi r sugarat, felírjuk az együtthatóformulát, majd triviális becslés:

$$|a_{-k}| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r} f(z)\cdot(z-c)^{k-1}\mathrm{d}z\right| \leqslant \left(\tfrac{1}{2\pi}\max_{|z-c|=r}|f(z)|\cdot r^{k-1}\right)\cdot 2\pi r =$$

$$= \left(\max_{|z-c|=r}|(z-c)\cdot f(z)|\right)\cdot r^{k-1}.$$

Most $r\to 0$. A feltétel szerint $\lim_{r\to 0+}\max_{|z-c|=r}|(z-c)\cdot f(z)| = 0$. A második tényező, r^{k-1} konstans, ha $k=1$, és 0-hoz tart, ha $k\geqslant 2$.

A határérték mindenképpen 0, tehát $a_{-k}=0$.

Pólusok

Tétel (pólusok jellemzése)

Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek izolált szingularitása van a c pontban, a c egy pontozott környezetében a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$, és m pozitív egész.

Ezek ekvivalensek:

(a) Az $f(z)$-nek a c pontban m-edrendű pólusa van.

(b) $a_{-m}\neq 0$, és $a_{-m-1} = a_{-m-2} = a_{-m-3} = \ldots = 0$.

(c) Az $1/f(z)$ függvénynek a c pontban m-szeres gyöke van.

(d) $\lim\limits_{z\to c}\big((z-c)^m f(z)\big)$ létezik, véges és nem 0.

Következmény. *$f(z)$-nek akkor és csak akkor van pólusa c-ben, ha $\lim\limits_{z\to c} f(z) = \infty$.*

Bizonyítás. (a)⇒(b): Egy c-ben holomorf, nemnulla $g(z)$ függvénnyel $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$. Vegyük $g(z)$ hatványsorát c körül, és osszuk el $(z-c)^m$-mel, megkapjuk $f(z)$ Laurent-sorát. Trivi, hogy $a_{-m-1} = a_{-m-2} = \ldots = 0$ és $a_{-m} = g(c)\neq 0$.

(b)⇒(a): legyen $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-c)^n$, akkor $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$ és $g(c) = a_{-m}\neq 0$.

(a)⇔(c): Ha $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$ és $g(c)\neq 0$, akkor $\dfrac{1}{f(z)} = (z-c)^m\cdot\dfrac{1}{g(z)}$ és fordítva.

(a)⇒(d): $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$ és $g(c)\neq 0$, tehát $\lim\limits_{z\to c}\big((z-c)^m f(z)\big) = \lim\limits_{z\to c} g(z) = g(c)\neq 0$.

(d)⇒(a): A $g(z) = (z-c)^m f(z)$ függvénynek véges, nemnulla határértéke van, tehát $g(z)$-nek megszüntethető szingularitása van c-ben, $g(c)$ értéke nem 0.

Lényeges szingularitások

Tétel (lényeges szingularitások jellemzése)

Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek izolált szingularitása van a c pontban, a c egy pontozott környezetében a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$.

Ezek ekvivalensek:

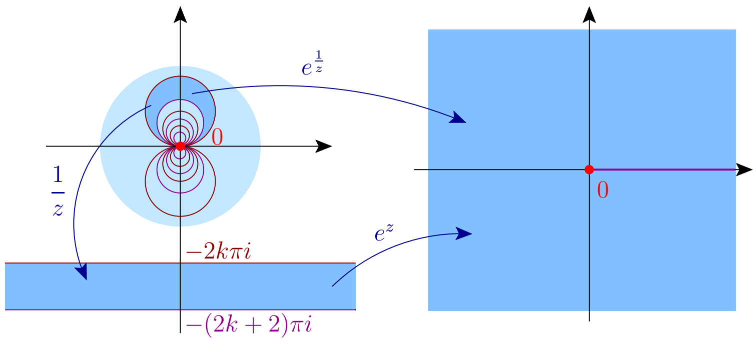
(a) Az $f(z)$-nek a c pontban lényeges szingularitása van.

(b) Az $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ együtthatók között végtelen sok nemnulla van.

(c) A $\lim_{z\to c} f(z)$ határérték nem létezik (véges és végtelen sem).

Példa. *az $e^{1/z}$ szingularitása a 0-ban*

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/n!}{z^n}$$



Mindegyik holdacska képe a teljes komplex sík, kivéve a 0 pontot.

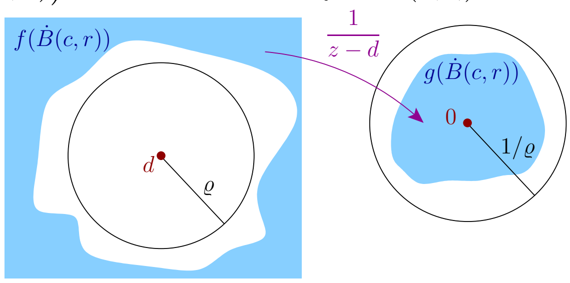
Példa (az $\exp(1/iz + \pi i/3)$ hatása a 0 közelében)

Tétel (Casorati–Weierstrass tétel)

Ha $f(z)$-nek lényeges szingularitása van a c pontban, akkor

- bármely $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$-hez van olyan $(z_1, z_2, \ldots)$ sorozat, amelyre $z_n \neq c$, $z_n \to c$ és $f(z_n) \to \alpha$.
- Bármely $r > 0$-ra, a $\dot{B}(c,r)$ pontozott környezet f szerinti képe, $f\big((\dot{B}(c,r)\big)$ sűrű $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás. A két állítás ekvivalens; a másodikat bizonyítjuk.
↯ Tegyük fel, hogy $f\big((\dot{B}(c,r)\big)$ nem sűrű: valamilyen $B(d,\varrho)$ körben nincs pontja.



Legyen $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - d}$; ezzel $g\big((\dot{B}(c,r)\big) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{\varrho})$.

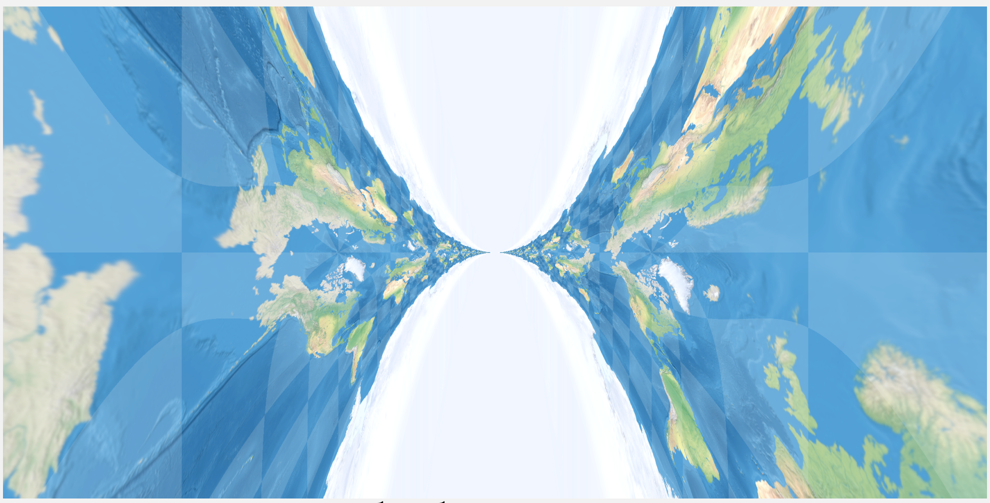
A $\dot{B}(c,r)$ pontozott környezetben $g(z)$ korlátos, tehát c-ben megszüntethető szingularitása van.

Ha $g(c) \neq 0$, akkor $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + d$ holomorf c-ben, de ez ellentmodás, mert feltettük, hogy lényeges szingularitása van.

Ha pedig $g(c) = 0$, akkor $\lim\limits_{z \to c} f(c) = \lim\limits_{z \to c} \left(\dfrac{1}{g(z)} + d \right) = \infty$, tehát f-nek pólusa van c-ben; ez is ellentmondás. ↯

Tétel (nagy Picard-tétel)

Ha $f(z)$-nek lényeges szingularitása van a c pontban, akkor a c bármely pontozott környezetében, legfeljebb 1 kivétellel, minden komplex értéket végtelen sokszor felvesz.



$\frac{1}{4} \sin \frac{1}{z}$ a 0 közelében

Nem bizonyítjuk. Vagy mégis?

Definíció (viselkedés ∞-ben)

Az $f(z)$ ∞-beli viselkedésén az $f(1/z)$ 0-beli viselkedését értjük:

- $f(z)$ a ∞-ben holomorf, ha $f(1/z)$ a 0-ban holomorf.
- $f(z)$-nek a ∞-ben m-szeres gyöke van, ha $f(1/z)$-nek a 0-ban m-szeres gyöke van.
- $f(z)$-nek a ∞-ben m-edrendű pólusa van, ha $f(1/z)$-nek a 0-ban m-edrendű pólusa van.
- $f(z)$-nek a ∞-ben lényeges szingularitása van, ha $f(1/z)$-nek a 0 lényeges szingularitása.

Példa.

- *Az m-edfokú polinomoknak a ∞-ben m-edrendű pólusuk van.*
- *Az e^z függvénynek a ∞-ben lényeges szingularitása van.*

14. A reziduumtétel

Reziduum véges szingularitás körül. Reziduumtétel. Módszerek a reziduum kiszámítására. Reziduum ∞-ben.

Definíció (függvény reziduuma véges pontban)

Legyen $f(z)$ holomorf a c komplex szám egy pontozott környezetében, és itt a Laurent-sora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Az a_{-1} együtthatót az $f(z)$ függvény c pontbeli *reziduumának* nevezzük; jele

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) \quad \text{vagy} \quad \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Lemma (ekvivalens definíció)

Ha $f(z)$ holomorf a $0 < |z-c| < r_0$ körben, akkor bármely $0 < r < r_o$ esetén

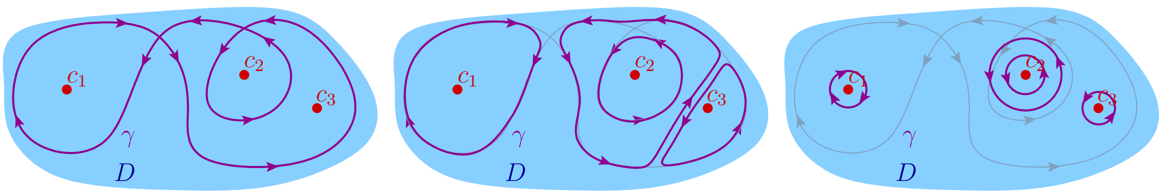
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z) \mathrm{d}z = \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Bizonyítás. Ez éppen az együttható-formula az a_{-1}-re.

Tétel (Rezidumtétel, nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \mathrm{d}z = \sum_{c \in D} n(\gamma, c) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f.$$



Szemléletesen, a γ görbét részekre vagdoshatjuk úgy, hogy minden darabja egy szingularitást kerüljön meg egyszer, pozitív vagy negatív irányban, majd ezeket a darabokat egy-egy kis körre mozgatjuk, végül megszámoljuk a köröket a szingularitások körül.

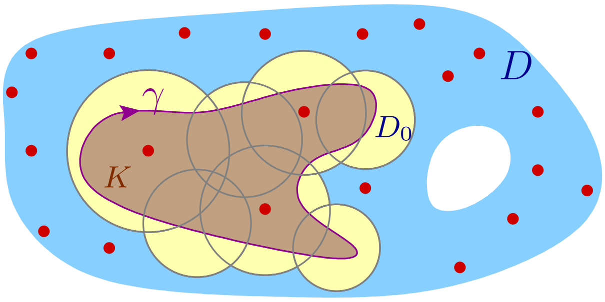
Persze a dolgok nem mindig olyan egyszerűek, ahogy elképzeljük...


Bárányhimlő. Szerencsére ezek csak megszüntethető szingularitások

A reziduumtétel bizonyítása. Az $f(z)$-nek végtelen sok szingularitása is lehet (a tartomány határán torlódhatnak); először ezzel kezdünk valamit.

A D-t egy szűkebb D_0 tartományra cseréljük, amelyben már csak véges sok szingularitás van.

A γ nullhomotóp, tehát van egy folytonos $\Gamma(t,u) : [0,1]^2 \to D$ leképezés úgy, hogy minden $u \in [0,1]$ paraméter értékre $t \mapsto \Gamma(t,u)$ egy zárt görbe, $\gamma(t) = \Gamma(t,0)$ és $t \to \Gamma(t,1)$ konstans. Legyen K a Γ képe, ami összefüggő és kompakt.



A K minden c pontja körül vegyünk egy $B(c,r_c)$ nyílt körlemezt úgy, hogy a $\dot{B}(c,r_c)$ pontozott környezeten az $f(z)$ holomorf legyen. Ezek a nyílt körök lefedik K-t, tehát közülük véges sok, $B_1, B_2, \ldots, B_N$ is lefedi.

Legyen $D_0 = B_1 \cup \cdots \cup B_N$; ez egy összefüggő, nyílt halmaz, amely tartalmazza K-t; tehát a γ görbe D_0-ben is nullhomotóp.

Mivel mindegyik B_j-ben legfeljebb egy szingularitása lehet $f(z)$-nek, a D_0 tartományban már csak véges sok szingularitás van.

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z-c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C}\backslash\{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.

Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok szinguláris (negatív kitevős) részét: legyen

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,-n}}{(z-c_1)^n}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2,-n}}{(z-c_2)^n}\right) - \cdots - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,-n}}{(z-c_m)^n}\right).$$

A szingularitásokon kívül ez mind holomorf.

Bármely $1 \leqslant j \leqslant m$-re a c_j pontban az $f(z) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}$ függvénynek megszüntethető szingularitása van, a többi kivont sor pedig holomorf c_j-ben. Tehát, $g(z)$-nek mindegyik c_j-ben megszüntethető szingularitása van; $g(z)$ az egész D_0 tartományon holomorf.

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n};$$

a $D_0 \backslash \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z) \mathrm{d}z = 0$.
$n \geqslant 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0. Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-c_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\operatorname*{Res}_{c_j} f \cdot n(\gamma, c_j) \right).$$

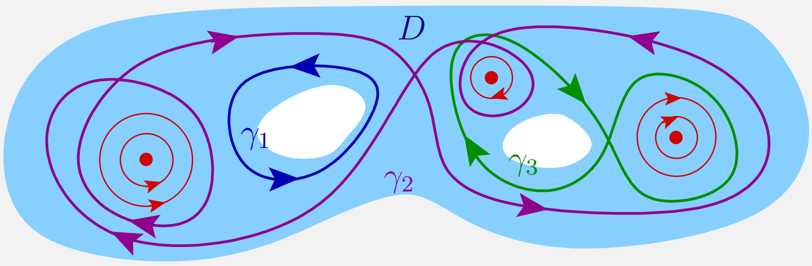
Ha $c \in D_0$ nem szingularitás, akkor ott f holomorf, így $\operatorname{Res} f = 0$.
Ha $c \notin D_0$, akkor $\frac{1}{z-c}$ holomorf D_0-on és γ nullhomotóp, ezért $n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-c} = 0$.

Ezek után

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma, c_j) \cdot \operatorname*{Res}_{c_j} f = \sum_{c \in D} n(\gamma, c) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Tétel (rezidumtétel, nullhomológ változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c \notin D$ pontra $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z) \mathrm{d}z = \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f$.



Bizonyítás (vázlat). Legyen $D_1 \subset D$ az a tartomány, ahol f holomorf. Az eddigi görbékhez továbbiakat veszünk hozzá: mindegyik c szingularitás körül rajzolunk $-\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c)$ darab kis kört. Az így kapott görbe lánc indexe minden D_1-en kívüli pontra nézve 0, tehát az általános Cauchy-tétel szerint ezeken a görbéken a vonalintegrálok összege 0. Ezért,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z) \mathrm{d}z - \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f = 0.$$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...

- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák.

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, *tehát* $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^2 \cdot e^{1/z}\right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/6}{z} + \ldots$, *tehát* $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z} = \cos 0$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = \frac{(\cos z)''\big|_{z=0}}{2!} = -\frac{1}{2}$.

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-c)^n$, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z\to c} f(z) \cdot (z-c).$$

- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c}\big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z\to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$

- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z\to c} \frac{z-c}{f(z)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

- Ha a c pontban $f(z)$ és $g(z)$ holomorf, $g(c) \neq 0$, és $h(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{g(z) \cdot h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)} \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)} \cdot \frac{1}{h'(c)} = \frac{f(c)}{g(c) \cdot h'(c)}.$$

Példák.

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\sin z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z^4-1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{-4i}.$$

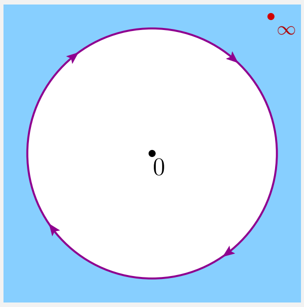
$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{(z^3 + 2\sin z) \cdot \cos z} = \frac{e^{2z}}{(z^3 + 2\sin z)' \cdot \cos z}\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{2}.$$

Definíció (Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Lemma (ekvivalens definíciók)

- Ha $f(z)$ holomorf az R sugarú körön és azon kívül, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z$.
- $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right)$.



Bizonyítás. (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

(b) Helyettesítéses integrálás: $z = \frac{1}{w}$ (Megfordítja a kör irányítását!), $\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{R}} f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{-\mathrm{d}w}{w^2} = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$

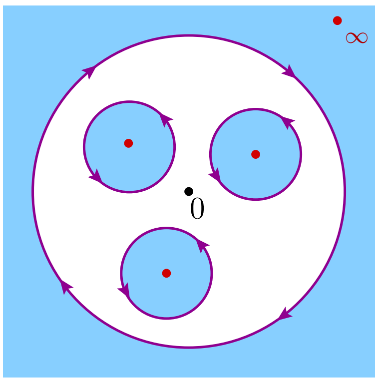
Tétel (A reziduumok összege)

Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

Bizonyítás. Ha a véges szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = \left(\sum_{|c|<R} \operatorname*{Res}_c f\right) + \operatorname*{Res}_{\infty} f$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$



15. A reziduumtétel alkalmazásai

$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}$ és $\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}$ kiszámítása a reziduumtétel segítségével.
A $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény alapvető tulajdonságai. Végtelen sorok összegzése a $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$, a $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ és a $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ függvények reziduumaival. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ és $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+-\ldots$ kiszámítása.

Improprius integrálok kiszámítása

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}+1}\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = ?$$

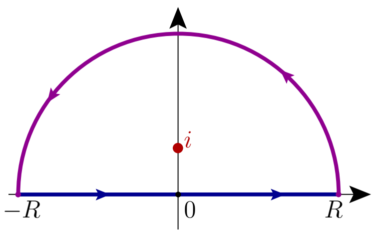
Példa (félkörön integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int_{\circlearrowleft} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z - \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z \\
&= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} + O\left(\frac{1}{R^2}\cdot R\right) \\
&= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} + O\left(\frac{1}{R}\right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} + O\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\pi}{e} + O\left(\frac{1}{R}\right).
\end{aligned}$$



A $R\to\infty$ határátmenetből: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{2e}.$

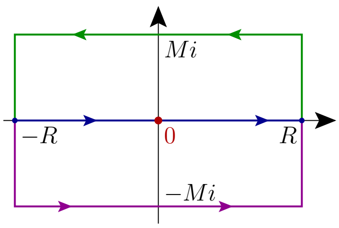
Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás:

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\lfloor\to\rfloor} \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\lfloor\to\rfloor} \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{4i}\int_{\lfloor\to\rfloor} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\lfloor\to\rfloor} \frac{e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z.$$



A felső félsíkban e^{iz}, az alsó félsíkban e^{-iz} korlátos.

$$\ldots = \frac{1}{4i}\int_{\square} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\lceil\leftarrow\rceil} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\lfloor\to\rfloor} \frac{e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z} - \frac{1}{4i}\int_{\lceil\leftarrow\rceil} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\lfloor\to\rfloor} \frac{e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\lceil\leftarrow\rceil} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\lfloor\to\rfloor} \frac{e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z.$$

A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \leqslant 1$ és $|z| \geqslant R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M.$

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \leqslant e^{-M}$ és $|z| \geqslant M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R.$

Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) + O\left(e^{-\sqrt{R}}\sqrt{R}\right).$$

Mindkét hibatag 0-hoz tart, tehát

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

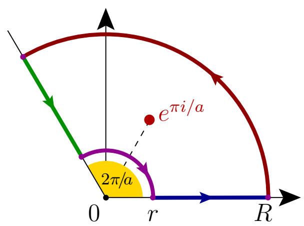
Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a > 1)$$

Megoldás:

$$2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}}\frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}}\frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$



$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i\cdot\frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a})\int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = \lim_{r\to 0, R\to\infty}\int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = 2\pi i\cdot\frac{-e^{\pi i/a}}{a\cdot(1-e^{2\pi i/a})} = \frac{\pi}{a}\cdot\frac{2i}{e^{\pi i/a}-e^{-\pi i/a}} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}.$$

$a \to 1$-re, $a = 2$-re és $a \to \infty$-re könnyen ellenőrizhetjük.

Példa ("kulcslyukgörbén" integrálunk)

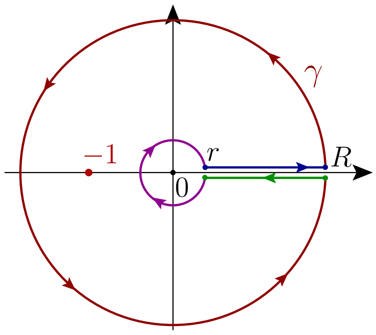
$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás:

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \leqslant -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z)\cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x) \quad dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\ dx,$$

$$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n\cdot R\Big), \qquad \int_{\text{lila}} = O\Big((\log\frac{1}{r})^n\cdot r\Big).$$



Reziduumtétel:

$$\sum_{r<|c|<R} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\cdot p(\log z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_r^R f(x)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\mathrm{d}x + O\Big(R^{d+1}(\log R)^n\Big) + O\Big((\log\frac{1}{r})^n\cdot r\Big).$$

$r\to 0$, $R\to\infty$ határátmenet: $\displaystyle\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}}\operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log x)\Big).$

Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

$$\frac{p(X) - p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{p(\log z)}{(z+1)^2}$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=-1}\Big(p(\log z)\Big)'\Big|_{z=-1} = p'(\log(-1))\cdot\frac{1}{-1} = -p'(\pi i) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Végtelen sorok összegének kiszámítása

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

$$\frac{1}{1^4+1} + \frac{1}{2^4+1} + \frac{1}{3^4+1} + \frac{1}{4^4+1} + \ldots = ?$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = ?$$

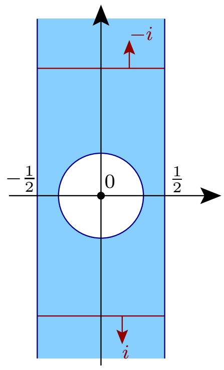
Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z = k$ pontban, akkor $\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.

(d) Ha a síkból elhagyjuk az egész számok 1/4 sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény korlátos.



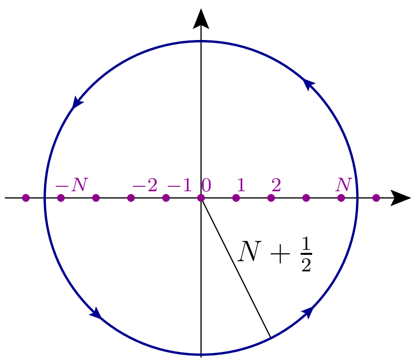
Bizonyítás. (a) $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ pólusai ott vannak, ahol $\sin(\pi z) = 0$, vagyis az egész helyeken.
(b) $\operatorname*{Res}_{z=k} \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\Bigg|_{z=k} = 1.$
(c) Az $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$-nek a k helyen elsőrendű pólusa van, tehát $\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k) \cdot \operatorname*{Res}_{z=k}\Big(\pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.
(d) $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$ esetén $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) \to \mp i$, ezért pl. a $|\operatorname{Re} z| \leqslant \frac{1}{2}$, $|z| > 1/4$ perióduson a függvény korlátos.

Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leqslant -2$, akkor $\displaystyle\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\displaystyle\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Bizonyítás.



(b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.

(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z| = N + \frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.
A körvonalon $|f(z)| = O(N^{\deg f}) \leqslant O(N^{-2})$, $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, így

$$\sum_{|c|\leqslant N} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \mathrm{d}z = O\left(\frac{1}{N^2} \cdot N\right) = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Az $N \to \infty$ határátmenetből $\displaystyle\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

Példa

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

Megoldás. Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Ha $k \neq 0$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=k} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \right) = \frac{1}{k^2}.$

A $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sora a 0 közelében $\operatorname{ctg} z = z^{-1} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \dots$

Átírva πz-vel: $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = z^{-3} - \frac{\pi^2}{3}z^{-1} - \frac{\pi^4}{45}z - \dots,$ tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = -\frac{\pi^2}{3}.$

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok 1/4 sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.

  $\operatorname*{Res}_{z=k} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.

- $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname*{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}.$

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) ??? (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban; a $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ függvényegyenlettel kiterjeszthetjük az egész síkra). A függvénynek elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken. Gond, hogy a függvény gyorsan nő, és nem könnyű kiszámolni sem...

  Érdekesség: $\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$

- $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = (\log \Gamma(s))'$ (digamma függvény) ??? Ennek is elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken, -1 reziduummal, és nem is nő nagyon gyorsan; a logaritmus megszelídíti...

  $\psi(1-s) - \psi(s) = \pi \operatorname{ctg}(\pi s)$

Példa

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \dots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

Megoldás:

$$\sum \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \right) = 0; \quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \dots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \right) = \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3} \cdot (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z) = 1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \frac{\pi}{z^3} \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + O\big(|z|^4\big)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\pi}{z^3} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{2} z^2 + O\big(|z|^4\big)\right) = \pi z^{-3} + \frac{\pi^3}{2} z^{-1} + O\big(|z|\big)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{\pi^3}{2}.$$

$$0 = \sum \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{\pi^3}{2} - 8 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}, \qquad \text{tehát:} \quad \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

16. Az argumentumelv

Meromorf függvények. Logaritmikus derivált. Argumentumelv rektifikálható görbékkel határolt tartományra. Az argumentumelv kiterjesztései

Definíció (meromorf függvény)

Az $f(z)$ függvény *meromorf* a D tartományon, ha izolált szingularitások kivételével holomorf, és mindegyik szingularitás pólus.

Ebben a részben meromorf függvények gyökeit és pólusait fogjuk számolni mindenféle görbék belsejében.

A fő eszközünk a gyökök számolásához:

Definíció (logaritmikus derivált)

Legyen $f(z)$ meromorf egy D tartományon. Az $f(z)$ *logaritmikus deriváltja* az $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ függvény.

A logaritmikus derivált ott értelmes (és persze holomorf), ahol az $f(z)$ holomorf és nem nulla.

A lokálisan létező $\log f(z)$ függvénnyel $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \big(\log f(z)\big)'$; innen jön a név.

Az $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ helyett szokás így is írni: $\dfrac{f'}{f}(z)$, kihangsúlyozva, hogy a logaritmikus derivált egy operátor.

Lemma (A logaritmikus derivált tulajdonságai)

(a) $\dfrac{(f \cdot g)'}{f \cdot g} = \dfrac{f'}{f} + \dfrac{g'}{g}$;

(b) $\dfrac{(f/g)'}{f/g} = \dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g}$.

Bizonyítás. (a)

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g},$$

vagy, némi odafigyeléssel, lokálisan

$$\frac{(fg)'}{fg} = (\log fg)' = (\log f + \log g + C)' = (\log f)' + (\log g)' = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

(b)

$$\frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{(f'g - fg')/g^2}{f/g} = \frac{f'g - fg'}{fg} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g},$$

vagy:

$$\frac{(f/g)'}{f/g} = (\log f/g)' = (\log f - \log g + C)' = (\log f)' - (\log g)' = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Tétel (A logaritmikus derivált reziduumai)

Tegyük fel, hogy $f(z)$ meromorf a c pont egy környezetében.

(a) Ha f holomorf c-ben és $f(c) \neq 0$, akkor $\dfrac{f'}{f}$ holomorf c-ben, így $\operatorname*{Res}_c \dfrac{f'}{f} = 0$.

(b) Ha f-nek m-szeres gyöke van c-ben, akkor $\dfrac{f'}{f}$-nek c-ben elsőrendű pólusa van, és $\operatorname*{Res}_c \dfrac{f'}{f} = m$.

(c) Ha f-nek m-edrendű pólusa van c-ben, akkor $\dfrac{f'}{f}$-nek c-ben elsőrendű pólusa van, és $\operatorname*{Res}_c \dfrac{f'}{f} = -m$.

Bizonyítás. (b) $f(z) = h(z) \cdot (z-c)^m$, a $h(z)$ függvény holomorf c-ben, és $h(c) \neq 0$.

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{h'}{h}(z) + \frac{\left((z-c)^m\right)'}{(z-c)^m} = \frac{h'}{h}(z) + \frac{m}{z-c};$$

$$\operatorname*{Res}_c \frac{f'}{f}(z) = \operatorname*{Res}_c \frac{h'}{h}(z) + \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{m}{z-c} = 0 + m.$$

(c) $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-c)^m}$, a $h(z)$ függvény holomorf c-ben, és $h(c) \neq 0$.

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{h'}{h}(z) - \frac{\left((z-c)^m\right)'}{(z-c)^m} = \frac{h'}{h}(z) - \frac{m}{z-c};$$

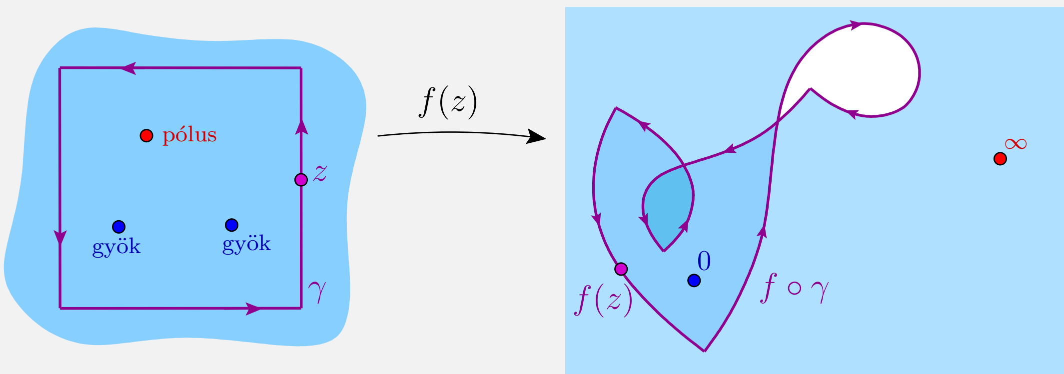
$$\operatorname*{Res}_c \frac{f'}{f}(z) = \operatorname*{Res}_c \frac{h'}{h}(z) - \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{m}{z-c} = 0 - m.$$

Tétel (argumentumelv)

Legyen $f(z)$ meromorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyzerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át $f(z)$ gyökein és pólusain.
Jelöljük Z-vel és P-vel $f(z)$ gyökeinek és pólusainak számát γ belsejében multiplicitással, vagyis minden gyököt és pólust annyiszor számolunk, ahányszoros gyök, illetve ahányadrendű pólus. Ekkor

$$Z - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}(z) \mathrm{d}z = n(f \circ \gamma, 0)$$

avagy: *A gyökök száma mínusz a pólusok száma a γ belsejében éppen annyi, mint ahányszor z-vel a görbe mentén körbesétálva, $f(z)$ értéke körbefordul.*



Bizonyítás. (a) Az $\frac{f'}{f}(z)$ logaritmikus derivált reziduuma az m-szeres gyököknél m, az m-edrendű pólusoknál $-m$, a többi pontban 0. A gyökök száma, Z a pozitív reziduumok összege, a pólusok száma, P pedig a negatív reziduumok összege (-1)-szer.

$$Z - P = \sum_{\gamma \text{ belsejében}} \operatorname{Res} \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}(z) \mathrm{d}z.$$

(b) A $w = f(z)$ helyettesítéssel integrálva $\mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z$ és

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z\in\gamma} \frac{f'}{f}(z) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{w\in(f\circ\gamma)} \frac{\mathrm{d}w}{w} = n(f\circ\gamma, 0).$$

Definíció

Legyen $f(z)$ holomorf az a pontban, és $f(a) = b$. Azt mondjuk, hogy az a pontban a b érték multiplicitása m, ha

- $f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$ és $f^{(m)}(a) \neq 0$, vagyis
- az $f(z) - b$ függvénynek az a szám m-szeres gyöke.

Tétel

Legyen $f(z)$ meromorf a D tartományon, és a komplex szám. Legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyzerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át $f(z)$ pólusain, és a γ pontjaiban $f \neq a$.
Jelöljük Z_a-val és P-vel, hogy $f(z)$ hányszor veszi fel az a értéket, illetve $f(z)$ pólusainak számát γ belsejében multiplicitással. Ekkor

$$Z_a - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} \mathrm{d}z = n(f\circ\gamma, a)$$

avagy: *a függvény éppen annyiszor veszi fel az a értéket, mínusz a pólusok száma, mint ahányszor z-vel γ mentén körbesétálva, $f(z)$ értéke megkerüli az a-t.*

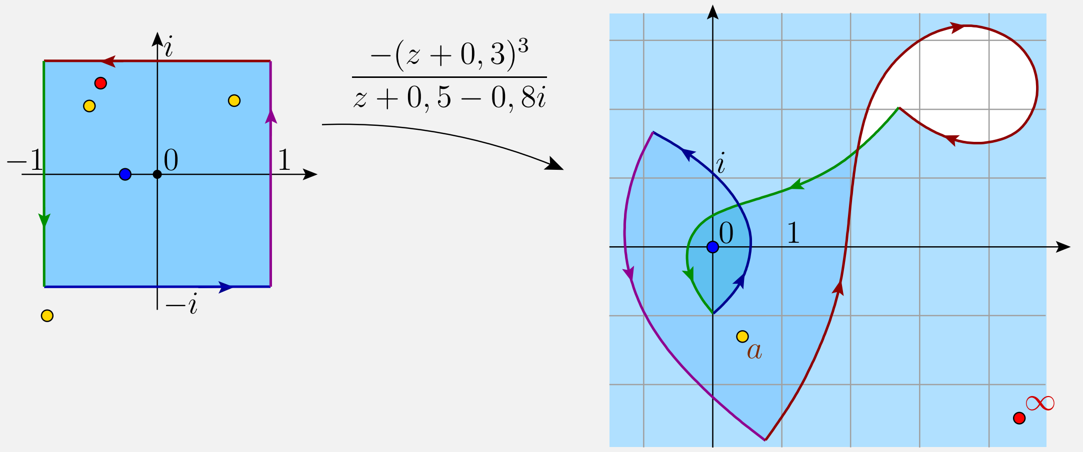
Bizonyítás. Argumentumelv a $g(z) = f(z) - a$ függvényre, majd $w = f(z)$ helyettesítés:

$$Z_a(f) - P(f) = Z(g) - P(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z\in\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{z\in\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{w\in(f\circ\gamma)} \frac{\mathrm{d}w}{w - a} = n(f\circ\gamma, a).$$

Példa

A γ görbe a $\pm 1 \pm i$ csúcsú négyzet határa és $f(z) = \dfrac{-(z+0,3)^3}{z+0,5-0,8i}$.



A függvénynek háromszoros gyöke van a $(-0,3)$-ben, és elsőrendű pólusa a $(-0,5+0,8i)$-ben, tehát $Z - P = 3 - 1 = 2$. Az $f \circ \gamma$ görbe kétszer kerüli meg a 0-t.

A baloldalon a három sárga pont egyszeres képe az a pont, de csak kettő esik a γ belsejébe. Tehát $Z_a - P = 2 - 1 = 1$; az $f \circ \gamma$ görbe egyszer kerüli meg az a pontot.

Tétel (általános argumentumelv)

Legyen $f(z)$ meromorf, $g(z)$ holomorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyszerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át $f(z)$ gyökein és pólusain.
Bármely c pontra legyen $m(c)$ a c multiplicitása, ha c gyöke f-nek; legyen $-m(c)$ a c rendje, ha c pólusa f-nek; egyébként legyen $m(c) = 0$. Ekkor

$$\sum_{c \text{ belső pont}} m(c) \cdot g(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \cdot \frac{f'}{f}(z) \mathrm{d}z.$$

Bizonyítás. Mivel $\dfrac{f'}{f}$-nek csak elsőrendű pólusai vannak,

$$\operatorname*{Res}_c \left(g \cdot \frac{f'}{f} \right) = g(c) \cdot \operatorname*{Res}_c \frac{f'}{f} = g(c) \cdot m(c);$$

$$\sum_{c \text{ belső pont}} m(c) \cdot g(c) = \sum_{c \text{ belső pont}} \operatorname*{Res}_c \left(g \cdot \frac{f'}{f} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \cdot \frac{f'}{f}(z) \mathrm{d}z.$$

Példák

- $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'}{f}(z)\mathrm{d}z$ az f gyökeinek száma (mínusz a pólusok száma) a görbe belsejében, multiplicitással.
- $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma z\cdot\dfrac{f'}{f}(z)\mathrm{d}z$ az f gyökeinek összege (mínusz a pólusok összege) a görbe belsejében, multiplicitással.
- $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'(z)}{f(z)-a}\mathrm{d}z$ az $f(z)=a$ egyenlet megoldásainak száma (mínusz a pólusok száma) a görbe belsejében, multiplicitással.
- $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma z\cdot\dfrac{f'(z)}{f(z)-a}\mathrm{d}z$ az $f(z)=a$ egyenlet megoldásainak összege (mínusz a pólusok összege) a görbe belsejében, multiplicitással.

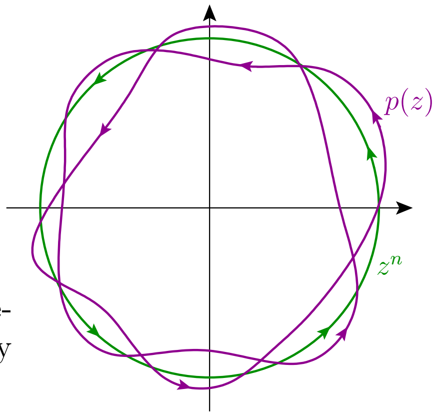
  Ha $f(z)$ holomorf, és valahonnan tudjuk, hogy pontosan egy, egyszeres megoldás van, akkor ez az integrál megadja magát a megoldást.

17. A Rouché-tétel és alkalmazásai

Rouché-tétel. Az algebra alaptételének bizonyítása a Rouché-tételből. Lokális értékeloszlás. A nyílt leképezés tétele. Lokális inverz létezésének feltétele. Az inverzfüggvény folytonossága és differenciálhatósága.

Tegyük fel, szeretnénk bebizonyítani az algebra alaptételét az argumentumelvből.

Legyen $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.



Ha $|z|$ nagy, akkor

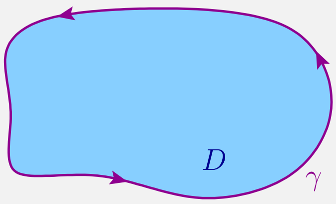
$$p(z) = z^n + \text{"zaj"};$$

a "zaj" sokkal kisebb, mint a főtag, z^n.

Egy nagy körön a z^n n-szer fordul körbe. Szemléletesen, egy kis zaj ezt nem tudja elrontani... Vagy mégis?

Tétel (Rouché)

Legyen $f(z)$, $g(z)$ és $h(z) = f(z) + g(z)$ meromorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyzerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át f és g pólusain. Jelölje $Z_{\ldots}$ és $P_{\ldots}$ a megfelelő függvény gyökeinek, és pólusainak számát γ belsejében.



(1a) Ha a γ pontjaiban $|f| > |g|$, akkor $Z_{f+g} - P_{f+g} = Z_f - P_f$.

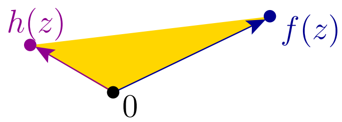
(1b) Ha a γ pontjaiban $|f| > |f - h|$, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

(2a) Ha a γ pontjaiban sem f, sem h nem nulla, és f/h nem lehet negatív valós sem, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

(2b) Ha a γ pontjaiban $|f - h| < |f| + |h|$, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

Bizonyítás.

(1a) és (1b) ugyanaz.



(2a) és (2b) is azt fejezi ki, hogy az $f(z)$ és $h(z)$ pontokat összekötő zárt szakasz nem tartalmazza a 0-t.

(2*b*) $\Rightarrow$ (1*b*) triviális, mert ha $|f - h| < |f|$, akkor $|f - h| < |f| + |h|$.

Elég (2a)-t igazolni.

(2a) Állítás: ha a γ pontjaiban $f \neq 0$, $h \neq 0$, és f/h nem lehet negatív valós, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

Legyen D_1 az a halmaz, ahol sem f, sem h nem nulla, és f/h nem negatív valós. Ahol $f=0$ vagy $h=0$ vagy $f/h \in (-\infty, 0)$ az egy relatív zárt halmaz, tehát D_1 nyílt; az egyik komponensében fekszik γ.

A D_1 halmazban $\dfrac{(h/f)'}{h/f}$-nek van primitív függvénye D_1-en: a $\log\dfrac{h}{f}$ főértéke. Ezért

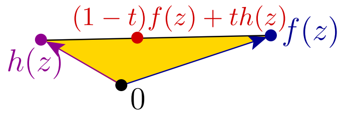
$$(Z_h - P_h) - (Z_f - P_f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(h/f)'}{h/f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\log\frac{h}{f}\right)' = 0.$$

Tehát, $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

Alternatív bizonyítás: $0 \leqslant t \leqslant 1$ esetén legyen

$\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{\big((1-t)f+th\big)'}{(1-t)f+th}$. Ez minden $0 \leqslant t \leqslant 1$ esetén értelmes, mert γ pontjaiban $(1-t)f+th \neq 0$.



A $\varphi(t) = Z_{(1-t)f+th} - P_{(1-t)f+th}$ érték mindig egész szám; másrészt $\varphi(t)$, mint paraméteres integrál, folytonos. Tehát $\varphi(t)$ konstans, és $Z_f - P_f = \varphi(0) = \varphi(1) = Z_h - P_h$.

Egy újabb bizonyítás az algebra alaptételére

Legyen $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Legyen

$$R > 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|,$$

és írjuk fel a Rouché-tételt a $p(z)$ és az z^n függvényekre a $|z| \leqslant R$ körben.

A körvonalon

$$\big|p(z) - z^n\big| = \big|a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0\big| \leqslant$$

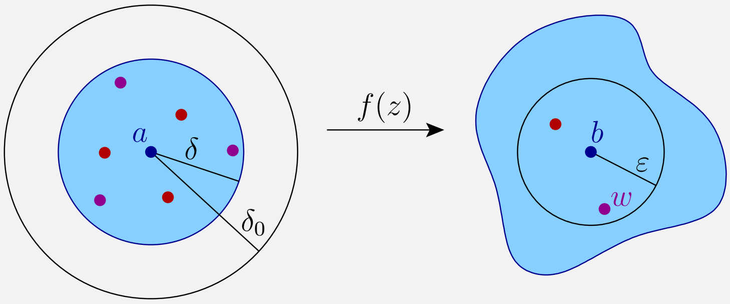
$$\leqslant |a_{n-1}|R^{n-1} + \ldots + |a_1|R + |a_0| \leqslant \big(|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|\big)R^{n-1} < R^n = |z^n|,$$

így a Rouché-tétel szerint a kör belsejében (multiplicitással számolva), a $p(z)$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint a z^n függvénynek, vagyis n darab.

Tétel (lokális értékeloszlás)

Legyen $f(z)$ holomorf az a pontban, és $f(a) = b$ k-szoros értéke (azaz $f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$). Ekkor $\exists \delta_0 > 0 \quad \forall 0 < \delta \leqslant \delta_0 \quad \exists \varepsilon > 0$, hogy

- Az $f(z) = b$ egyenletnek egyetlen megoldása az $B(a, \delta)$ halmazban a $z = a$ (és ez k-szoros érték), és
- Bármely $w \in \dot{B}(b, \varepsilon)$ számra az $f(z) = w$ egyenletnek pontosan k különböző megoldása van a $B(a, \delta)$ halmazban, és ezek mind egyszeres értékek.



Bizonyítás. Elég azt az esetet igazolni, ha $a = b = 0$.

Válasszuk δ_0-t olyan kicsinek, hogy a $0 < |z| \leqslant \delta_0$ körlapon $f \neq 0$ és $f' \neq 0$; ezt biztosan megtehetjük az unicitástétel miatt. Ezzel biztosítjuk, hogy $f(z) = 0$ egyetlen megoldása a $z = 0$, és minden más érték egyszeres.

Ha kaptunk az ellenségünktől egy neki tetsző $0 < \delta \leqslant \delta_0$ sugarat, akkor a mi lépésünk:

$$\varepsilon = \min_{|z|=\delta} \big|f(z)\big|.$$

($\varepsilon > 0$, mert a körvonalon $f \neq 0$.)

Most újra az ellenség lép: mond egy $w \in B(a, \varepsilon)$ számot.

A $|z| = \delta$ körvonalon $|f| \geqslant \varepsilon > |w|$. A Rouché-tétel miatt a $B(0, \delta)$ körlapon az $f(z) - w$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint az $f(z)$ függvénynek, vagyis pontosan k darab.

Ha $w = 0$, akkor a $f(z) = w$ egyenlet egyetlen, k-szoros megoldása a 0.

Ha $w \neq 0$, akkor a 0 nem megoldás; a k darab megoldás a $\dot{B}(0, \delta)$ pontozott körlapon van. Ott viszont $f' \neq 0$, tehát a k megoldás mindegyike egyszeres érték.

Tétel (A nyílt leképezés tétele)

Ha f holomorf és nem konstans a D tartományon, akkor D bármely nyílt részének képe nyílt.

Bizonyítás. Az kell, hogy bármely $b \in f(D)$ pont belső pontja a képhalmaznak.

Legyen $b = f(a)$, a b multiplicitása az a-ban k. A lokális értékeloszlás tétele miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $B(b, \varepsilon)$ minden pontját legalább k-szor felveszi f.

Ezért biztosan $B(b, \varepsilon) \subset f(D)$; a b belső pontja $f(D)$-nek.

Tétel (a lokális inverz létezése)

Legyen f holomorf az a pontban. $f(a) = b$. Az $f(z)$ függvénynek akkor és csak akkor létezik holomorf $g(w)$ lokális inverze a b pont körül, amelyre $g(b) = a$, ha $f'(a) \neq 0$.

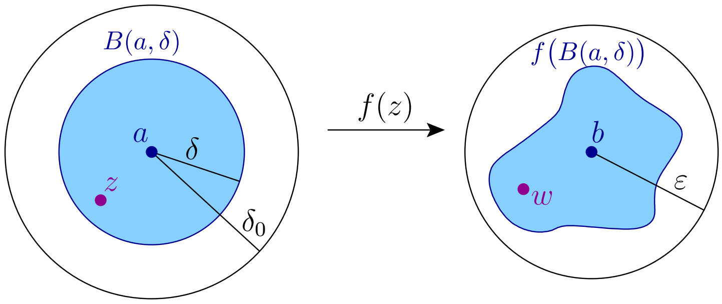
Bizonyítás. Legyen k a b multiplicitása az a pontban, és legyen δ_0 az a sugár, amelyet a lokális értékeloszlás tétele előír.

Tekintsünk egy tetszőleges $0 < \delta < \delta_0$ sugarat és a $B(a, \delta)$ körlapot. A lokális értékeloszlás tétele miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $w \in \dot{B}(b, \varepsilon)$ értéket f pontosan k-szor vesz fel.

$\Rightarrow$ Ha $f'(a) = 0$, akkor $k \geqslant 2$. Tetszőlegesen kicsi $B(a, \delta)$ körlapon lesz k különböző pont, ahol f értéke megegyezik, tehát f nem lehet injektív az a pont semmilyen környezetében sem.

$\Leftarrow$ Ha $f'(a) \neq 0$, akkor $k = 1$.

A lokális értékeloszlás tétele miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $w \in B(b, \varepsilon)$ értéket pontosan $k = 1$-szer vesz fel f a $B(a, \delta_0)$ körlapon.



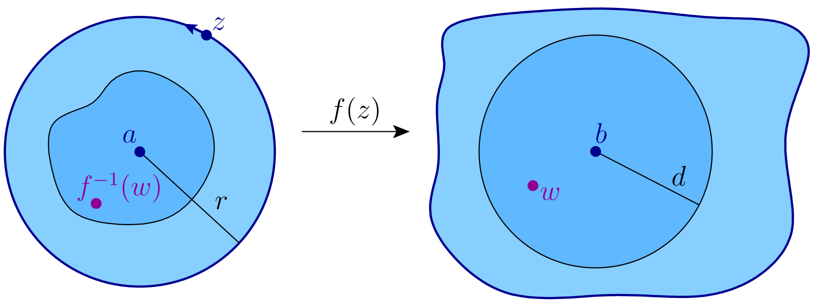
Az f folytonossága miatt van olyan $0 < \delta \leqslant \delta_0$, hogy $f\big(B(a, \delta)\big) \subset B(b, \varepsilon)$. Ezzel a választással bármely $z \in B(a, \delta)$ esetén a $w = f(z)$ számot a függvény pontosan egy helyen veszi fel a $B(a, \delta_0)$ körlapon, és ez a hely maga a z. Tehát, f injektív a $B(a, \delta)$ körlapon.

A nyílt leképezés tétele matt az $f\big(B(a, \delta)\big)$ halmaz nyílt, és az $f(z)$ úgy felelteti meg kölcsönösen egymásnak a $B(a, \delta)$ és a $f\big(B(a, \delta)\big)$ halmazokat, hogy nyílt halmazok képe nyílt, vagyis a lokális inverz $g = f^{-1}$ függvény is folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint ha g lokális inverze f-nek, $f' \neq 0$ és g folytonos b-ben, akkor g differenciálható, és $g'(f(z)) = \dfrac{1}{f'(z)}$.

Alternatív bizonyítás az inverz függvény létezésére és differenciálhatóságára

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az a pontban, $f(a) = b$ és $f'(a) \neq 0$.



Az unicitástétel miatt elég kis $r > 0$ esetén az f csak egyszer veszi fel a b értéket a $B(a, r)$ halmazon. Legyen $d = \min_{|z-a|=r} |f(z) - b|$. A Rouché-tétel miatt bármely $w \in B(b, d)$ értéket az f pontosan egyszer vesz fel a $B(a, r)$ körben, és ez a hely az általánosított argumentumelv szerint

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w} \mathrm{d}z.$$

Ez a paraméteres integrál viszont differenciálható:

$$\left(f^{-1}(w)\right)' = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{\partial}{\partial w} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w} \right) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{z \cdot f'(z)}{\left(f(z) - w\right)^2} \mathrm{d}z.$$

Példa (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel)

Tegyük fel, hogy $f(z, w)$ kétváltozós komplex függvény, folytonos az (a, b) egy környezetében, mindkét változó szerint holomorf, $f(a, b) = 0$ és $D_2 f(a, b) \neq 0$. Ekkor létezik az a pontnak olyan A környezete és a b pontnak olyan B környezete, hogy

(a) Bármely $z \in A$ ponthoz van egy egyértelmű $w = g(z) \in B$ pont, amelyre $f(z, w) = 0$;

(b) A $g : A \to B$ implicit függvény holomorf;

(c) $g'(z) = -\dfrac{D_1 f(z, g(z))}{D_2 f(z, g(z))}$.

Bizonyítás. (a) Válasszunk olyan kis $r > 0$ sugarat, hogy a $|w - b| \leqslant r$ zárt körlemezen $f(a, w)$ injektív. Legyen $m = \min_{|w-b| \leqslant r} |f(a, w)|$, $B = B(b, r)$, és A olyan kis környezete a-nak, hogy a $z \in A$, $|w - b| = r$ halmazon $|f(z, w) - f(a, w)| < m$.

Vizsgáljunk egy rögzített $z \in A$ pontot. A $|w-b| = r$ körvonalon $|f(z, w)-f(a, w)| < m \leqslant f(a, w)$. A Rouché-tétel szerint a $w \mapsto f(z, w)$ és a $w \mapsto f(a, w)$ függvénynek ugyanannyi gyöke van. Mivel $f(a, w)$ injektív, egyetlen, egyszeres gyöke van, a b. Tehát, pontosan egy olyan $w \in B$ létezik, amelyre $f(z, w) = 0$.

(b) A $g(z)$ implicit függvényt az általánosított argumentumelv segítségével felírhatjuk integrál alakban. A $g(z)$ szám az $f(z, w) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása, egyben a megoldásainak összege a $|w - b| < r$ körben, vagyis

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-b|=r} w \cdot \frac{D_2 f(z, w)}{f(z, w)} \mathrm{d}w.$$

Azt a Young-tételnél láttuk, hogy $f(z, w)$ akárhányszor differenciálható, ezért ez a paraméteres integrál is holomorf.

(c) Ugyanaz, mint valósban: az $f(z, g(z)) = 0$ azonosságot deriváljuk:

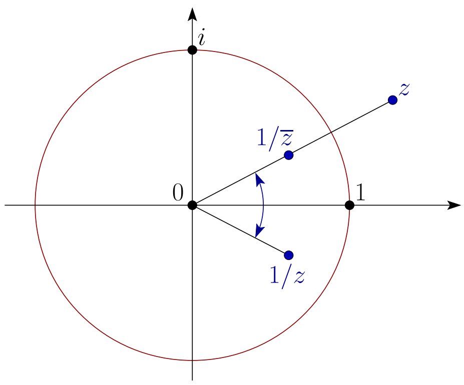
$$D_1 f(z, g(z)) + D_2 f(z, g(z)) \cdot g'(z) = 0.$$

18. Törtlineáris függvények

Az $1/z$ és az $1/\overline{z}$ függvény. Törtlineáris függvények. Reprezentáció mátrixszorzással. Három pont képe egyértelműen meghatározza a törlineáris függvényt. Komplex kettősviszony. Kettősviszonytartás, körtartás, szögtartás, szimmetriatartás.

A következő néhány előadáson azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen egyszeresen összefüggő tartományok között létezik konform megfeleltetés, vagyis oda-vissza holomorf bijekció.

Két fontos geometriai transzformáció: $1/\overline{z}$ és $1/z$



$$\left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\arg z, \qquad \arg\frac{1}{\overline{z}} = \arg z$$

Az $\dfrac{1}{\overline{z}}$ függvény inverzió az egységkörvonalra. Az inverzió definícióját teljesen természetesen (és folytonosan) kiterjeszthetjük a 0 pontra és a ∞-re, ezek egymás inverzei.

Az $\dfrac{1}{z}$ függvény egy tükrözött inverzió, az inverziót kombináljuk a valós tengelyre való tükrözéssel.

Érdemes meggondolni, hogy ezek milyen geometriai transzformációit adják meg a Riemann-gömbnek: az $1/z$ a $(-1, 1)$ átmérőre való tükrözés; az $\dfrac{1}{\overline{z}}$ az egyenlő síkjára való tükrözés.

Definíció (törtlineáris függvény, lineáris törtfüggvény, Möbius-transzformáció)

Az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (ad \neq bc)$$

alakú meromorf függvényeket hívjuk *törtlineáris függvény*nek vagy *lineáris törtfüggvény*nek vagy *Möbius-transzformáció*nak.

- Ha a Riemann-gömböt (a komplex projektív egyenest) homogén koordinátákkal koordinátázzuk, akkor az $\dfrac{az+b}{cz+d}$ függvénynek megfelel a $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixszal való balról szorzás.
- Ha $c \neq 0$, akkor $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ (a nevező 0) és $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Ha $c = 0$, akkor $f(\infty) = \infty$.

Tétel

- A függvénynek megfelelő mátrix nem nulla konstanssal való szorzástól eltekintve egyértelmű.
- Ha $f(z)$ és $g(z)$ törtlineáris függvények, egy-egy mátrix alakjuk F, illetve G, akkor $f \circ g$ mátrix alakja $F \cdot G$.
- Ha $f(z)$ törtlineáris függvény, egy mátrix alakja $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $f^{-1}(z)$ mátrix alakja $F^{-1} \sim \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
- A törtlineáris függvények csoportja a $PGL(2, \mathbb{C})$ csoport.

Tétel

- A törtlineáris függvények csoportját generálják az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$, vagyis minden törtlineáris függvény előállítható ilyenek egy sorozatának kompozíciójaként.
- Minden törtlineáris függvény bijekció a Riemann-gömbről önmagára.

Bizonyítás. (a) Ha $c = 0$, akkor

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Ha $c \neq 0$, akkor

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{cz+d} \cdot \frac{bc-ad}{c} + \frac{a}{c}.$$

(b) A generátorelemek, tehát az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$ is bijekciók a Riemann-gömbről önmagára.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt:
bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$, és $f(z_3) = w_3$.

Bizonyítás. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$; $K = z_3 - z_2$.

1c. Ha $z_2 = \infty$: $f(z) = K\dfrac{z-z_1}{0 \cdot z + 1}$; $K = \dfrac{1}{z_3 - z_1}$.

1d. Ha $z_3 = \infty$: $f(z) = K \cdot \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ és $K = 1$.

2. Az általános eset: legyen g és h az a két törtlineáris függvény, amelyekre $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$ és $g(z_3) = 1$, illetve $h(w_1) = 0$, $h(w_2) = \infty$ és $h(w_3) = 1$; ezek után $f = h^{-1} \circ g$ megfelelő.

Az egyértelműség: Vizsgáljuk a $h \circ f$ függvényt: $h(f(z_1)) = 0$, $h(f(z_2)) = \infty$ és $h(f(z_3)) = 1$, tehát csak $h \circ f = g$ lehet, vagyis $f = h^{-1} \circ g$.

Definíció (komplex kettősviszony)

Az a, b, c, d különböző komplex számok kettősviszonya:

$$(a, b; c, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}.$$

Ha valamelyik ∞, akkor a megfelelő tört értéke 1, avagy a határértéket vesszük ∞-ben:

$$(\infty, b, c, d) = \frac{d-b}{c-b}, \quad (a, \infty, c, d) = \frac{c-a}{d-a},$$

$$(a, b, \infty, d) = \frac{d-b}{d-a}, \quad (a, b, c, \infty) = \frac{c-a}{c-b}.$$

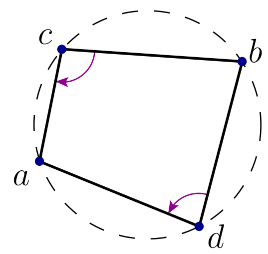
Tétel

Bármely négy különböző pont, a, b, c, d akkor és csak akkor van egy körön vagy egy egyenesen, ha $\operatorname{Im}(a, b; c, d) = 0$.
("köregyenes": kör vagy egyenes. Az "egyenes" olyan kör, ami átmegy a ∞-n.)

Bizonyítás. $\operatorname{Im}(a, b; c, d) = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$\arg \frac{c-a}{c-b} \equiv \arg \frac{d-a}{d-b} \pmod{\pi},$$

avagy irányított szögekkel $acb\measuredangle \equiv adb\measuredangle \pmod{\pi}$.



Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $\big(f(a), f(b); f(c), f(d)\big) = (a, b; c, d)$.

Bizonyítás. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.
A lineáris függvények megtartják az arányokat, így a kettősviszonyt is.
Az $1/z$ is megtartja a kettősviszonyt:

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}; \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) = \frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{\frac{c-a}{-ac} \cdot \frac{d-b}{-bd}}{\frac{d-a}{-ad} \cdot \frac{d-c}{-cd}} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(d-c)} = (a, b; c, d).$$

Tétel (körtartás)

A törtlineáris függvények a köregyeneseket köregyenesekbe képezik.

Bizonyítás. A generátorelemek: a lineáris függvények és az $1/z$ is ilyen tulajdonságú.

Tétel (szögtartás)

A törtlineáris függvények irányítottszög-tartók (kivéve a pólust)

Bizonyítás. Ha $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, akkor

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Megjegyzés (szög a végtelenben)

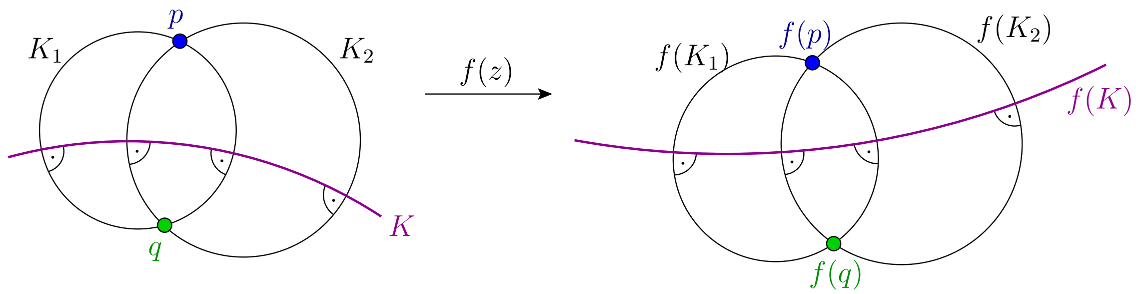
A végtelenben is lehet az irányított szöget definiálni, pl. ha a Riemann-gömbön mérjük az érintők közötti szöget. Vagy, ha a γ_1 és γ_2 görbék a ∞-ben metszik egymást, akkor ott az irányított szögük ugyanaz, mint $1/\gamma_1$és $1/\gamma_2$ görbék irányított szöge a 0-ban.

Ezzel a kiegészítéssel a pólusban és a végtelenben is szögtartók a törtlineáris függvények.

Tétel (szimmetriatartás)

A törtlineáris függvények szimmetrikus pontpárokat szimmetrikus pontpárokba képeznek:
Ha a p és q pontok szimmetrikusak a K köregyenesre (egymás tükörképei, illetve inverzei), és $f(z)$ törtlineáris függvény, akkor az $f(p)$ és $f(q)$ pontok szimmetrikusak az $f(K)$ köregyenesre.

Bizonyítás. Rajzolunk még két kört p-n és q-n keresztül, K_1-et és K_2-t.

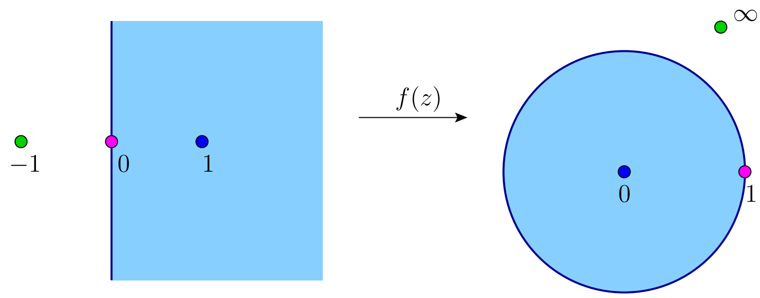


- K_1 és K_2 is szimmetrikus K-ra, tehát merőlegesen metszik K-t.
- A szögtartás miatt $f(K_1)$ és $f(K_2)$ is merőlegesen metszi $f(K)$-t.
- A $f(K_1)$ és $f(K_2)$ szimmetrikus $f(K)$-ra.
- Az $f(K_1)$ és $f(K_2)$ metszéspontjai, vagyis $f(p)$ és $f(q)$ is is szimmetrikusak $f(K)$-ra.

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.

Megoldás.



A függvény a képzetes tengelyt az egységkörvonalra képezi. Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre a -1, ennek képe a 0 inverze, a ∞:

$$f(-1) = \infty.$$

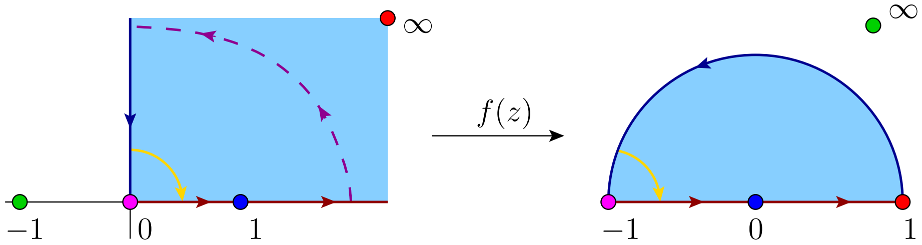
$f(0) = 1$, tehát $b = d$; választhatunk $b = d = 1$-et. $f(1) = 0$, tehát $a = -1$. $f(-1) = \infty$, tehát $c = 1$.

$$f(z) = \frac{-z+1}{z+1}.$$

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.

Megoldás.



A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1.

Ha a negyedsíkot levágjuk a lila görbével, akkor az argumentumelv értelmében az így kapott görbe $+1$-szer kerül minden értéket, amit a függvény felvesz. Ezért lesznek a felvett értékek a félkörvonal belsejében. Tehát, a körüljárásnak is meg kel maradnia, így csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.

Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre -1; ennek képe a 0 inverze, a ∞.

$$f(\infty) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = -1, \quad f(-1) = \infty; \qquad f(z) = \frac{1z-1}{1z+1}.$$

A $0, 1, \infty$ "körív" képe a $-1, 0, 1$ "körív". A képzetes félegyenes képe körív, a végpontjai ± 1. A körív merőleges a $[-1, 1]$ szakaszra, tehát félkörív; a derékszögek irányításából is tudjuk, hogy a felső félkör.

19. Az egységkör konform automorfizmusai

Konform megfeleltetések. Az egységkör 0-t fixen hagyó automorfizmusai a forgatások. A $\frac{z\pm a}{1\pm\overline{a}z}$ alakú törtlineáris függvények. Az egységkörlemez konform automorfizmusai. A körlemezek és félsíkok konform ekvivalensek, és közöttük minden konform megfeleltetés törtlineáris függvény. Az $\frac{z\pm a}{1\pm\overline{a}z}$ alakú törtek kiemelése az egségkörben holomorf függvényekből. Véges és végtelen Blaschke-szorzatok.

Definíció

Legyen D_1 és D_2 két tartomány és $f : D_1 \to D_2$.
Az $f(z)$ *konform*, ha holomorf és lokálisan injektív (vagyis a deriváltja nem 0).
Az $f(z)$ *biholomorf*, ha holomorf és bijektív. (Ebből következik, hogy az inverze is holomorf.)

Megjegyzés. *Ha $f : D_1 \to D_2$ bijektív, akkor nincs különbség. A magyar nyelvű könyvek egyszerűen csak konform(is) megfeleltetésnek nevezik a biholomorf $f : D_1 \to D_2$ bijekciókat.*
(Eredetileg a "konform" szögtartót jelent: differenciálható, lokálisan injektív és szögtartó.)

Definíció

Két tartomány, D_1 és D_2 *konform ekvivalens*, ha létezik közöttük konform megfeleltetés, vagyis biholomorf bijekció.
Az $D \to D$ konform megfeleltetéseket D konform automorfizmusainak nevezzük.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Bizonyítás. A forgatások persze automorfizmusok; a megfordítás (a "csak") a kérdés.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa az egységkörnek, és $f(0) = 0$.

A Schwarz-lemma szerint $|f'(0)| \leqslant 1$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha $f(z)$ forgatás.

Legyen $g = f^{-1}$. Ez is konform automorfizmus és $g(0) = 0$, tehát $|g'(0)| \leqslant 1$.

Az inverz függvény differenciálási szabálya miatt $f'(0) \cdot g'(0) = 1$.

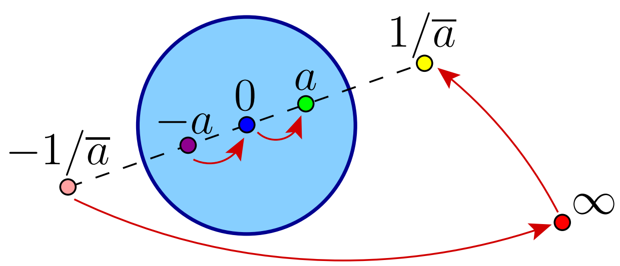
Mindez csak úgy lehetséges, ha $|f'(0)| = |g'(0)| = 1$, és f és g is forgatás.

Lemma

Legyen $|a| < 1$ és
$$\varphi(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$
A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:
$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Bizonyítás. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.



Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1+\overline{a}z| = |\overline{z}z+\overline{a}z| = |\overline{z}+\overline{a}| = |z+a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.

A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.

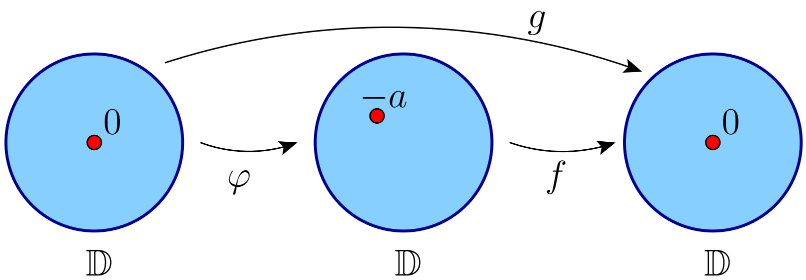
Az inverzt akár ki is lehet számolni, de 4 pont képét is ellenőrizhetjük: $\varphi^{-1}(a) = 0$, $\varphi^{-1}(0) = -a$; a tükörképekre $\varphi^{-1}(1/\overline{a}) = \infty$, $\varphi^{-1}(\infty) = -1/\overline{a}$.

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Bizonyítás. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.



Legyen $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

A $g = f \circ \varphi$ egy olyan automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, amelyre $g(0) = f(\varphi(0)) = f(-a) = 0$.

Tehát g egy forgatás, $g(z) = \varepsilon z$ valamilyen egységnyi ε-nal.

$$f(z) = g(\varphi^{-1}(z)) = \varepsilon \cdot \varphi^{-1}(z) = \varepsilon \cdot \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

Tétel

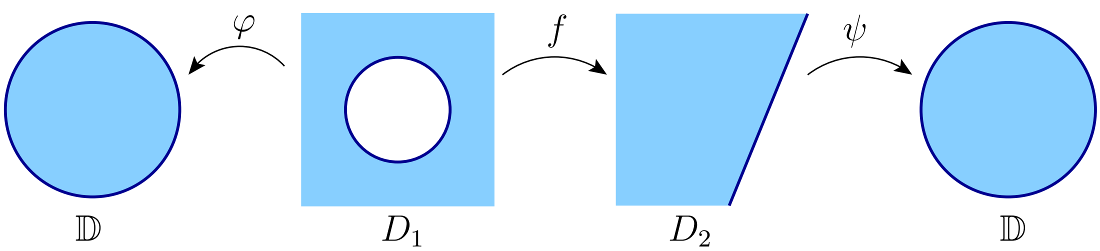
- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Bizonyítás. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal. A félsíkokat és körök külsejét alkalmas tükrözött inverzióval körlapba képezhetjük, majd alkalmazunk egy eltolást és nagyítást.

Az így kapott leképezés törtlineáris függvény.

(b) Tegyük fel, hogy f konform megfeleltetés a D_1 és D_2 körlemezek vagy félsíkok között.

Legyen $\phi : D_1 \to \mathbb{D}$ és $\psi : D_2 \to \mathbb{D}$ egy-egy törtlineáris függvény, amely megfeleltetés az egységkörrel.



A $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ az egységkörnek konform automorfizmusa, tehát törtlineáris függvény.

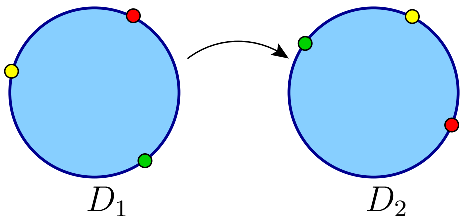
Akkor viszont $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ is törtlineáris függvény.

Tétel

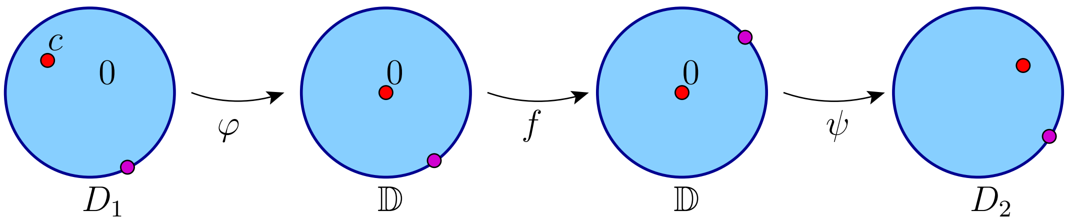
Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya. (A derivált abszolút értéke egyértelmű.)

Bizonyítás. (a) A 3 pont meghatározza a kört; a sorrend meghatározza, hogy a kép kívül van, vagy belül.



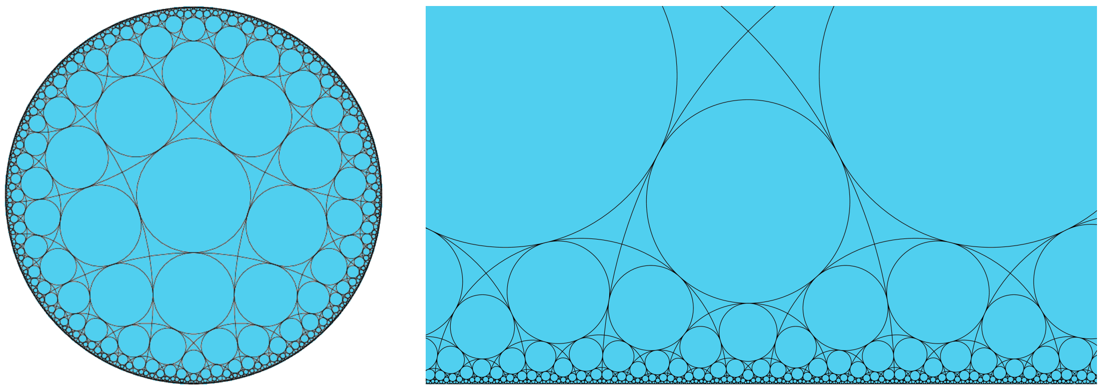
(b) Elég az egységkörlemezre bizonyítani; $\dfrac{z+a}{1-\bar{a}z}$ alakú függvényekkel kombinálva elérhetjük, hogy a megadott pont és a képe is a 0 legyen; utána a megadott határpont megmondja, hogy melyik forgatásról van szó.



(c) Ugyanaz, mint a (b), csak a forgatást nem egy határpont, hanem derivált iránya mondja meg:

$$\big(\psi \circ f \circ \varphi\big)'(c) = \psi'(0) \cdot f'(0) \cdot \varphi'(c).$$

Mese. *Az egységkörlemezt szeretjük azonosítani a Poincaré-féle körmodellel, a felső félsíkot pedig a félsíkmodellel.*



A konform automorfizmusok a modellek irányítástartó egybevágóságai.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.
Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Bizonyítás. A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leqslant \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \geqslant \max_{|z|=r} |g(z)| \cdot \min_{|z|=r} \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|,$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \geqslant \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Következmény

Az egységkörben holomorf függvényekből kiemelhetők az $\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ alakú "gyöktényezők" úgy, hogy a függvény szuprémuma nem változik meg.
Ha n gyök van: $a_1, \ldots, a_n$, akkor kiemelhetjük a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$$

szorzatot.

Az ilyen típusú szorzatokat *véges Blaschke-szorzat*oknak nevezzük.

Ugyanígy pólusokat is megszüntethetünk az $\dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}$ alakú törtek kiemelésével.

Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom

$$c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$$

(a sík irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

Pl. Gauss–Lucas tétel: Ha f legalább másodfokú polinom, akkor f gyökeinek konvex burka tartalmazza f' gyökeit.

Pl. A polinomok jellemzése: ha $f(z)$ egészfüggvény, és $\lim\limits_{z\to\infty} = \infty$, akkor $f(z)$ polinom.

véges Blaschke-szorzat

$$\varepsilon \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}$$

(a körmodell irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

Ha f legalább kéttényezős Blaschke-szorzat, akkor f gyökeinek a körmodellben vett konvex burka tartalmazza f'-nek az egységkörbe eső gyökeit.

Ha $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf, és $\lim\limits_{|z|\to 1-0} \big|f(z)\big| = 1$, akkor $f(z)$ véges Blaschke-szorzat.

Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

$$z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_k|}{a_k} \cdot \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \right).$$

Ettől legalább a 0-ban konvergens, és tetszés szerint átrendezhető a szorzat.

Tétel (végtelen Blaschke-szorzat konvergenciája)

- A Blaschke-szorzat lokálisan egyenletesen konvergens.
- Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(1 - |a_k|\big) = \infty$, akkor Blaschke-szorzat a konstans 0.
- Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(1 - |a_k|\big) < \infty$, akkor Blaschke-szorzat nem a konstans 0, és a gyökei $a_1, a_2, \ldots$, továbbá $m > 0$ esetén a 0.

20. Riemann-alaptétel

Riemann-alaptétel. Bármely két, a teljes síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens. A teljes sík nem konform ekvivalens az egységkörlemezzel. Hurwitz-tétel. Injektív függvények lokálisan egyenletes limesze. A Riemann-alaptétel bizonyítása.

Tétel (a konform leképezések alaptétele; Riemann-alaptétel)

Legyen $D \neq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $z_0 \in D$. Ekkor létezik egy egyértelmű $f : D \to \mathbb{D}$ konform megfeleltetés, amelyre $f(z_0) = 0$ és $f'(z_0)$ pozitív valós.

Következmény

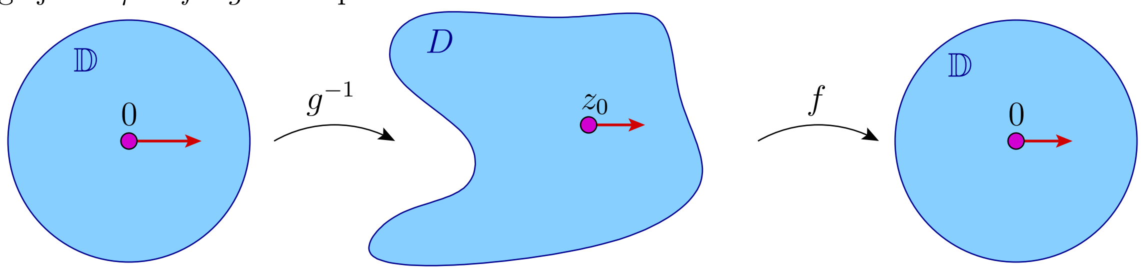
Bármely két, a teljes síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens.

Megjegyzés. *A tételben a kivétel a teljes sík. A teljes sík nem konform ekvivalens az egységkörrel, mert ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ holomorf, akkor a Liouville-tétel miatt csak konstans lehet.*

Az egyértelműség bizonyítása

Tegyük fel, hogy $f(z)$ és $g(z)$ olyan $D :\to \mathbb{D}$ konform megfeleltetések, amelyekre $f(z_0) = g(z_0) = 0$, valamint $f'(z_0)$ és $g'(z_0)$ is pozitív valós. Azt kell igazolnunk, hogy $f = g$.

Vizsgáljuk a $\varphi = f \circ g^{-1}$ leképezést.



- A φ konform automorfizmusa egységkörnek,
- $\varphi(0) = 0$, és
- $\varphi'(0) = f'(z_0) \cdot \left(g^{-1}\right)'(0) = f'(z_0) \cdot \dfrac{1}{g'(z_0)}$ pozitív valós.

Ez egyértelműen meghatározza a φ konform automorfizmust: $\varphi(w) = w$, vagyis $f = g$.

A megfeleltetés létezésnek bizonyítása

A fő ötletet a Schwarz-lemmából merítjük.

Legyen

$$\mathcal{F}_0 = \Big\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ holomorf, } f(0) = 0 \Big\}.$$

A Schwarz-lemma szerint:

- Bármely $f \in \mathcal{F}_0$ esetén $|f'(0)| \leqslant 1$.

- Bármely $f \in \mathcal{F}_0$ akkor és csak akkor automorfizmusa az egységkörnek, ha $|f'(0)| = 1$.

Tehát: $f \in \mathcal{F}_0$ akkor és csak akkor konform automorfizmus, ha $|f'(0)|$ maximális.

Definíció

A Riemann-alaptétel bizonyításához legyen

$$\mathcal{F} = \Big\{ f : D \to \mathbb{D} \text{ holomorf és injektív, } f(z_0) = 0,\ f'(z_0) \text{ pozitív valós} \Big\}.$$

Olyan $f_0 \in \mathcal{F}$ függvényt fogunk választani, amelyre $f_0'(z_0)$ maximális.

Segédtételek

Lemma (a logaritmus- és a hatványfüggvények létezése)

Ha D egyszeresen összefüggő, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf és $f \neq 0$, akkor D-n létezik $\log f$-nek és minden α-ra f^α-nak holomorf ága D-n.

Lemma (Weierstrass-tétel)

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak és $f_n(z) \to g(z)$ lokálisan egyenletesen, akkor g holomorf és $f_n'(z) \to g'(z)$ lokálisan egyenletesen.

Lemma (Vitali–Motel tétel)

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak, és egyenletesen korlátosak, akkor kiválasztható közülük lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat.

Lemma (Hurwitz-tétel)

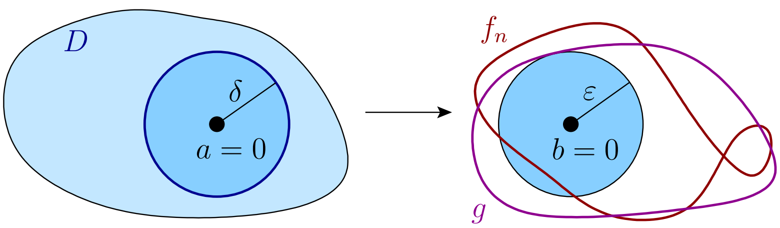
Tfh. $g, f_1, f_2, \ldots$ holomorf a D tartományon, $f_n \to g$ lokálisan egyenletesen, $a \in D$ és $b = g(a)$. Ekkor g vagy konstans, vagy az a bármilyen kis környezetében, elég nagy n-re az $f_n(z)$ függvény felveszi a b értéket:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \exists w \in B(a, \delta) \cap D \quad f_n(w) = b.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a = b = 0$.

Legyen δ_0 olyan sugár, hogy $\overline{B}(0, \delta_0) \subset D$, és a $0 < |z| \leqslant \delta_0$ körlapon $g \neq 0$. Ha ilyen sugár nincs, akkor g gyökei torlódnak a 0-ban, de akkor az unicitástétel miatt g konstans.

Tekintsünk egy tetszőleges $0 < \delta < \delta_0$-t, és legyen $\varepsilon = \min_{|z|=\delta} \big|g(z)\big|$.



Az egyenletes konvergencia miatt van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$-ra, a $|z| = \delta$ körvonalon

$$\big|g(z) - f_n(z)\big| < \varepsilon \leqslant \big|g(z)\big|.$$

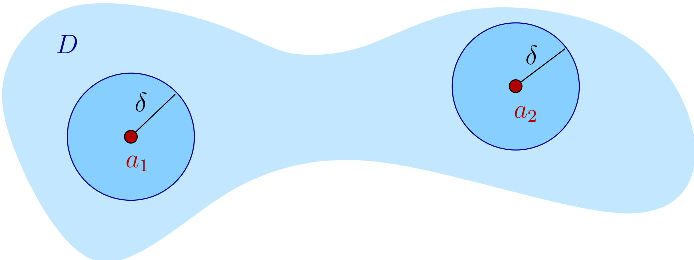
A Rouché-tétel miatt a $|z| < \delta$ körben a $f_n(z)$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint a $g(z)$ függvénynek, vagyis legalább egy.

Következmény

Injektív függvények lokálisan egyenletes limesze vagy konstans, vagy injektív: ha $g, f_1, f_2, \ldots$ holomorf a D tartományon, mindegyik f_n injektív és $f_n \to g$ lokálisan egyenletesen, akkor g vagy konstans, vagy injektív.

Bizonyítás. ↯ Tegyük fel, hogy g nem konstans, és nem is injektív.

Legyen $a_1, a_2 \in D$ két különböző pont D-ben, amelyekre $g(a_1) = g(a_2) = b$.



Válasszunk olyan δ-t, amelyre a $B(a_1, \delta)$ és $B(a_2, \delta)$ diszjunktak, és részei D-nek.

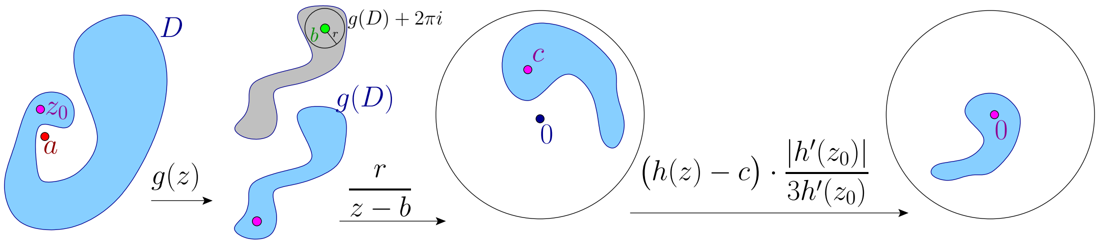
A Hurwitz-tétel miatt vannak olyan n_1 és n_2 küszöbindexek, hogy $n > n_1$ esetén $b \in f_n\big(B(a_1, \delta)\big)$ és $n > n_2$ esetén $b \in f_n\big(B(a_2, \delta)\big)$.

Ha $n > \max(n_1, n_2)$, akkor $f_n(z)$ mindkét körlapon felveszi a b értéket; de ez ellentmond annak, hogy f_n injektív. ↯

A Riemann-alaptétel bizonyítása, 1. lépés

1 Állítás. *A* $\mathcal{F} = \Big\{ f : D \to \mathbb{D}$ *holomorf és injektív,* $f(z_0) = 0,\ f'(z_0)$ *pozitív valós*$\Big\}$ *halmaz nem üres.*

Bizonyítás.



$D \neq \mathbb{C}$, vagyis van olyan a komplex szám, amelyre $a \notin D$. Legyen $g(z) = \log(z - a)$ a logaritmus valamelyik holomorf ágával. Bármely számnak legfeljebb egy logaritmusát veszi fel g, tehát g-nek nem lehet értéke a $g(D) + 2\pi i$ halmazban. Ez a halmaz nyílt; legyen $B(b, r)$ egy körlap a $g(D) + 2\pi i$ halmazban; ekkor tehát $|g(z) - b| \geqslant r$.

Ezek után legyen $h(z) = \dfrac{r}{g(z) - b}$; erre $|h| \leqslant 1$. A h injektív, tehát a deriváltja nem nulla.

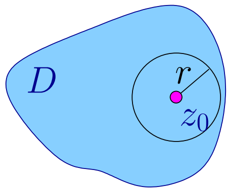
Legyen $c = h(z_0)$ és $f(z) = \big(h(z) - c\big) \cdot \dfrac{|h'(z_0)|}{h'(z_0)} \cdot \dfrac{1}{3}$. Erre a függvényre $|f(z)| \leqslant \big(|h(z)| + c\big) \cdot \frac{1}{3} < 1$, $f(z_0) = 0$ és $f'(z_0) = \dfrac{|h'(z_0)|}{3}$, ami pozitív valós. Tehát, $f \in \mathcal{F}$.

2. lépés

2 Állítás. *Legyen* $M = \sup\{f'(0):\ f \in \mathcal{F}\}$. *Ekkor* $0 < M < \infty$.

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}$ nemüres, van olyan f eleme, amelyre $f'(z_0) > 0$; ezért $M \geqslant f'(z_0) > 0$.

Az z_0 belső pontja D-nek; legyen $r > 0$ olyan, hogy $\overline{B}(z_0, r) \subset D$.



Bármely $f \in \mathcal{F}$ esetén $|f| < 1$, így

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \mathrm{d}z \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{1}{r},$$

ezért $M \leqslant \dfrac{1}{r}$.

3. lépés

3 Állítás. *Van olyan* $f_0 \in \mathcal{F}$, *amelyre* $f_0'(z) = M$. *Vagyis,* $M = \max\{f'(0):\ f \in \mathcal{F}\}$.

Bizonyítás. A szuprémumhoz tarthatunk alulról, így biztosan vannak olyan $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{F}$ függvények, amelyekre $f_n'(z_0) \nearrow M$.

Ezek a függvények az egységkörbe képeznek, ezért egyenletesen korlátosak. A Vitali–Montel tétel szerint kiválasztható közülük egy lokálisan egyenletesen konvergens $f_{n_1}, f_{n_2} \ldots$ részsorozat. Ennek limesze legyen f_0.

A Weierstrass-tétel miatt $f_0 = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}$ holomorf, és $f_{n_k}' \to f_0'$ lokálisan egyenletesen; speciálisan a z_0 pontban $f_0'(z_0) = \lim f_{n_k}'(z_0) = M$.

Az f_0 az f_{n_k} injektív függvények lokálisan egyenletes limesze, tehát f_0 vagy konstans, vagy pedig injektív. De az f_0 nem lehet konstans, mert például $f_0'(z_0) = M > 0$. Tehát f_0 injektív.

Mivel $|f_n| < 1$, az biztos, hogy $|f_0| = \lim\limits_{k\to\infty} |f_{n_k}| \leqslant 1$; de mivel f_0 nem konstans, a maximum-elv miatt (vagy a nyílt leképezés tétele miatt) az is igaz, hogy $|f_0| < 1$.

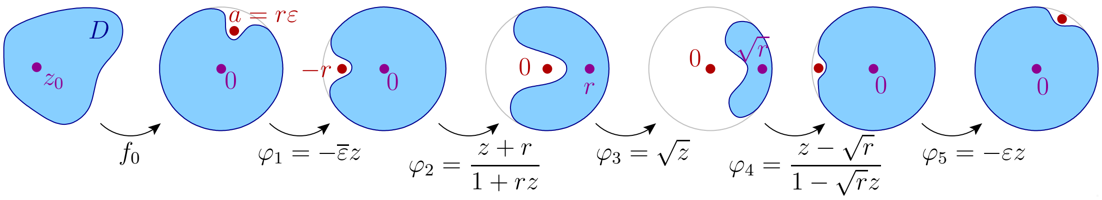
Ezek után $f_0 : D \to \mathbb{D}$ holomorf és injektív, és $f_0'(z_0) = M$.

4. (utolsó) lépés

4 Állítás. f_0 *szürjektív:* $f_0(D) = \mathbb{D}$.

Bizonyítás. ↯ Tegyük fel, hogy f_0 nem szürjektív; van egy olyan $a \in \mathbb{D}$ érték, amit nem vesz fel. Az a nem lehet a 0, mert $f_0(z_0) = 0$. Írjuk a-t $r\varepsilon$ alakban, ahol $0 < r < 1$ és ε egységnyi komplex szám.

Legyen $g(z)$ a következő leképezéseknek a kompozíciója:



$\varphi_1(z) = -\overline{\varepsilon} z$; ez az a-t a $(-r)$ pontba forgatja.

$\varphi_2(z) = \frac{z+r}{1+rz}$; a $\mathbb{D}$ automorfizmusa, a $(-r)$ képe a 0, a 0 képe az r.

φ_3 a $\varphi_2(\varphi_1(f_0(D)))$ halmazon a $\sqrt{z}$-nek az a holomorf ága, amely r-et $\sqrt{r}$-be képezi. A $\varphi_2(\varphi_1(f_0(D)))$ halmaz egyszeresen összefüggő, nyílt, nem tartalmazza a 0-t, így létezik rajta $\sqrt{z}$.

$\varphi_4(z) = \frac{z-\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}z}$; a $\mathbb{D}$ automorfizmusa, a $\sqrt{r}$ képe a 0.

$\varphi_5(z) = -\varepsilon z$; az első forgatás inverze.

Ezek kompozíciója, a $g = \varphi_5 \circ \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ f_0$ függvény is holomorf és injektív $D \to \mathbb{D}$ leképezés, $g(z_0) = 0$.

A φ_3 inverze a z^2, kiterjeszthető az egész egységkörre. A

$$h = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_3^{-1} \circ \varphi_4^{-1} \circ \varphi_5^{-1}$$

egy holomorf $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ függvény, de nem injektív.

A Schwarz-lemma miatt $|h'(0)| < 1$, tehát

$$|g'(z_0)| = \left| \frac{f_0'(z_0)}{h'(0)} \right| > \frac{M}{1} = M. \qquad ↯$$

Alternatív befejezés:

A $g = \varphi_5 \circ \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ f_0$ függvény deriváltját közvetlenül is kiszámolhatjuk.

- $f_0'(z_0) = M$;
- $\varphi_1'(0) = -\overline{\varepsilon}$;
- $\varphi_2'(z) = \dfrac{1 \cdot (1+rz) - r \cdot (z+r)}{(1+rz)^2} = \dfrac{1-r^2}{(1+rz)^2}$, tehát $\varphi_2'(0) = 1 - r^2 = (1+r)(1-r)$;
- $\varphi_3'(r) = \dfrac{1}{2\sqrt{r}}$;
- $\varphi_4'(z) = \dfrac{1 \cdot (1-\sqrt{r}z) + \sqrt{r} \cdot (z - \sqrt{r})}{(1-\sqrt{r}z)^2} = \dfrac{1-r}{(1-\sqrt{r}z)^2}$ és $\varphi_4'(\sqrt{r}) = \dfrac{1}{1-r}$;
- $\varphi_5'(0) = -\varepsilon$.

Összeszorozva: $g'(z_0) = f_0'(z_0) \cdot \varphi_1'(0) \cdot \varphi_2'(0) \cdot \varphi_3'(r) \cdot \varphi_4'(\sqrt{r}) \cdot \varphi_5'(0) = M \cdot \dfrac{1+r}{2\sqrt{r}}$ szintén pozitív valós, tehát $g \in \mathcal{F}$. A számtani-mértani miatt $1 + r > 2\sqrt{r}$, de akkor $g'(z_0) > M$. ↯

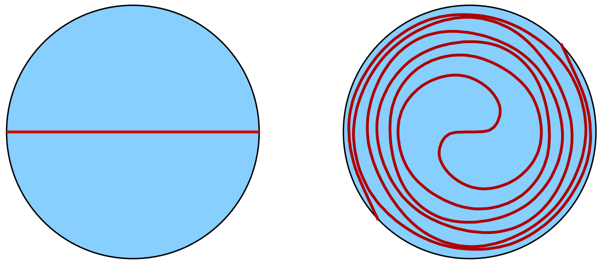
21. A tükrözési elv

Caratheodory tétele (bizonyítás nélkül). Tükrözési elv. Tükrözés körvonalakra. Bizonyítás a kis Picard-tételre

Tétel (Caratheodory)

Ha D_1 és D_2 Jordan-tartományok (egy-egy egyszerű zárt görbe belseje), és $f : D_1 \to D_2$ konform megfeleltetés közöttük, akkor f kiterjeszthető $\overline{D_1} \to \overline{D_2}$ homeomorfizmussá.

Példa. *Konform megfeleltetés helyett diffeomorfizmussal nem igaz, pl.*



$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad f(re^{it}) = re^{it + \frac{i}{1-r^2}}$$

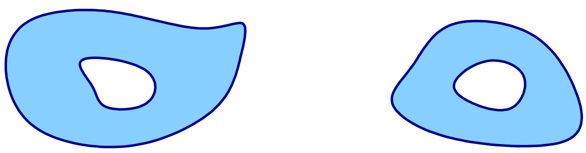
Következmény

Ha D_1 és D_2 Jordan-tartományok (egy-egy egyszerű zárt görbe belseje), akkor a $D_1 \to D_2$ konform megfeleltetéseket egyértelműen meghatározza

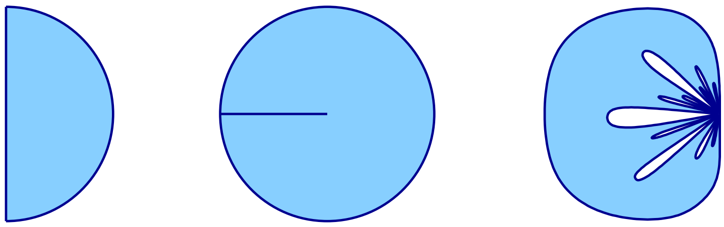
- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya.

Kiterjesztések

- Több egyszerű, zárt görbével határolt tartományok

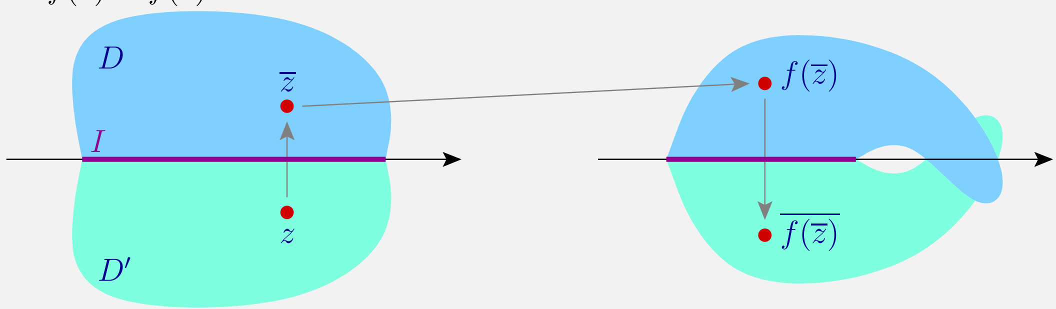


- Többszörös határpontok



Tétel (tükrözési elv)

Legyen D tartomány a felső félsíkban, amelynek a határa tartalmazza az I intervallumot, és legyen D' a D tükörképe a valós tengelyre.
Tegyük fel, hogy f holomorf D-n, folytonos $(D \cup I)$-n, és I pontjaiban $\operatorname{Im} f = 0$. Ekkor f holomorfan kiterjeszthető (folytatható) a $D_1 = (D \cup I \cup D')$ tartományra úgy, hogy a D' pontjaiban $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

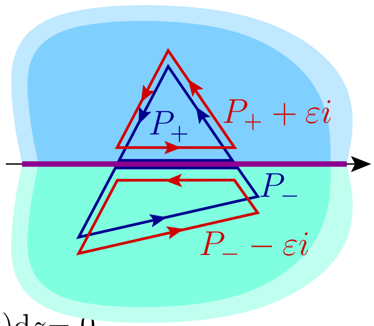


Bizonyítás. Az I pontjaiban a két képlet ugyanazt adja, így a kiterjesztett függvény folytonos D_1-en. Azt is tudjuk, hogy holomorf D-n és D'-n.

Annak bizonyításához, hogy f holomorf, elég a Morera-tételt ellenőrizni olyan D_1-beli háromszögekre, amelyeknek van pontja I-n.

Vágjuk el I-vel a háromszöget, és szűkítsük a tartományt úgy, hogy a maradék is tartalmazza a háromszöglemezt, és f egyenletesen folytonos legyen. A háromszög két fele, P_+ és P_- egy-egy zárt poligon az $D \cup I$, illetve a $D \cup I$ halmazban; elég azt igazolni, hogy mindkét poligonon 0 a vonalintegrál.

Ha a P_+ poligont εi-vel eltoljuk a felső tartomány belsejébe, akkor a vonalintegrál 0 lesz; az egyenletes folytonosság miatt

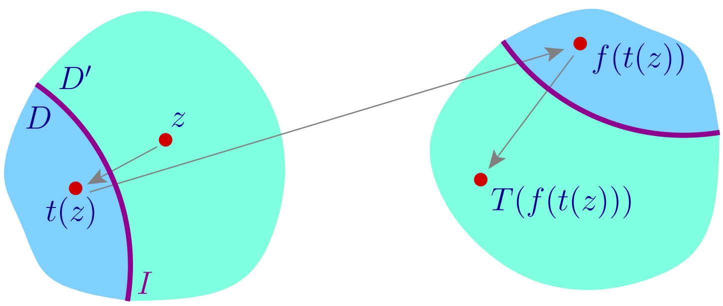


$$\int_{P_+} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{P_+} f(z+\varepsilon i)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{P_++\varepsilon i} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

és ugyanígy $\int_{P_-} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Akinek kalapácsa van...

Mire lehetne még tükrözni?



- Az I lehet egy másik egyenes tetszőleges szakasza
- Az I lehet egy körív. (A középpontba nem terjeszt ki)

- Az f függvény I pontjaiban megengedett értékei lehetnek egy másik egyenes pontjai
- Az f függvény I pontjaiban megengedett értékei lehetnek egy kör pontjai, de a középpont képe ∞ lesz.

Bizonyítás a kis Picard-tételre

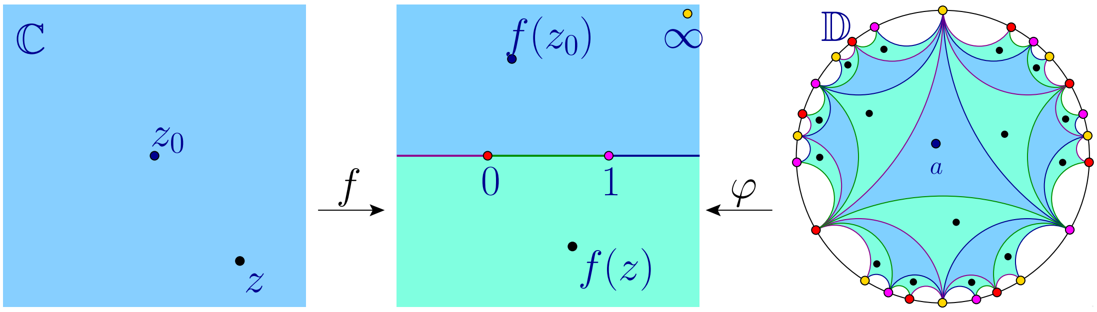
Tétel (kis Picard-tétel)

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor legfeljebb egy kivétellel minden komplex értéket felvesz.

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy nincs olyan f egészfüggvény, ami nem veszi fel a $0, 1$ értékeket.

Vegyünk fel az egységkör (a körmodell) határán három pontot, és ezeket kössük össze, az egségkörre merőleges körívekkel. Legyen φ az a konform megfeleltetés, amely a három körív közötti "végtelen" háromszöget megfelelteti a felső félsíknak úgy, hogy a három csúcs képe a 0, az 1 és a ∞.

A háromszöget mindegyik oldalívére tükrözzük, és a φ függvényt kiterjesztjük a tükörképekre. Ezt ismételjük újra meg újra; ilyen módon az egész egységkört kicsempézzük a háromszög tükörképeivel, és a φ függvényt kiterjesztjük az egész egységkörön holomorf függvénnyé.



Bármelyik két szomszédos háromszöget és a közöttük futó körívet φ megfeleltet egy olyan tartománynak, amely a két félsíkból és a $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumok valamelyikéből áll.

Jelöljünk ki egy z_0 pontot, amelyre $f(z_0)$ a felső félsíkban van, tehát φ szerinti egyik ősképe, a az eredeti háromszögben van. Most bármely z pont esetén definiálni fogunk egy $F(z)$ pontot az egységkörben úgy, hogy $\varphi(F(z)) = f(z)$.

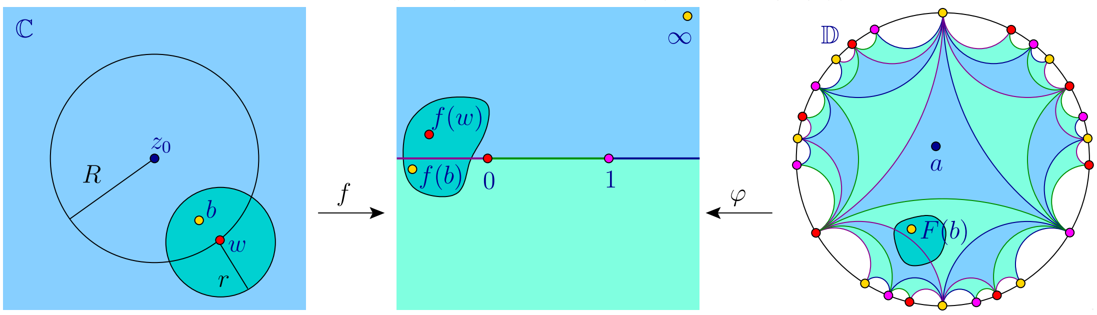
Legyen $R = \sup\Big\{r : \text{létezik olyan } F : B(z_0, r) \to \mathbb{D} \text{ holomorf, amire } F(z_0) = a \text{ és } \varphi(F(z)) = f(z)\Big\}$.

A z_0 egy környezetében $F = \varphi^{-1} \circ f$ megfelelő, tehát $R > 0$.

Az unicitástétel miatt az $F(z)$ értelmes a $B(z_0, R)$ körlapon.

1. eset: R véges.

Ha $|w - z_0| = R$, akkor van olyan $B(w, r)$ körlap, hogy $f(B(w, r))$ a lila, zöld és kék szakaszok közül legfeljebb csak egyet metsz, az X színűt. Vegyünk egy $b \in B(z_0, R) \cap B(w, r)$ pontot; ennek képe $F(w)$ az egyik háromszögben van; ha hozzávesszük az X színű oldalát és az mellette levő tükörkép háromszöget, a kettőt együtt φ megfelelteti a két félsíknak és az X színű szakasznak. Ennek a lokális φ-nek az inverzével F folytatható a $B(w, r)$ körlapra: $F(z) = \varphi^{-1}(f(z))$.

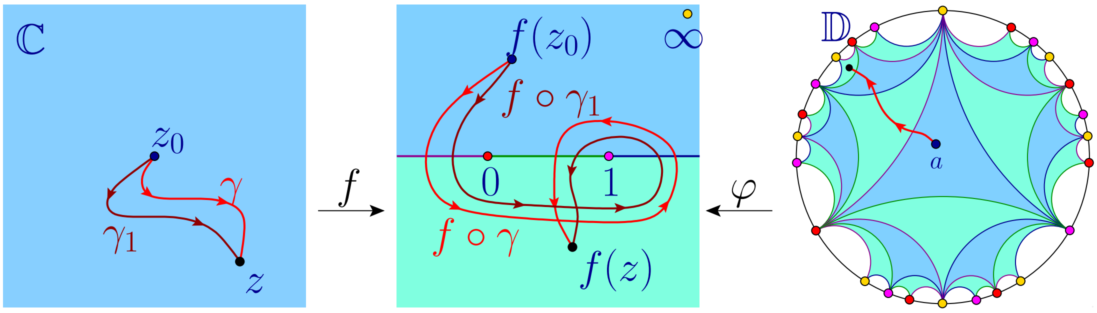


Az $|w - z_0| = R$ körvonal minden pontja körül tudjuk folytatni a függvényt egy kis (mikiegérfül alakú) körben. A kompaktság miatt ezek közül véges sok is lefedi a körvonalat. A szomszédos köröcskék metszete a nagy körbe is belemetsz, így a kétféle folytatás egy közös folytatást ad. Ezért a fülek egy közös folytatást adnak egy kicsivel nagyobb körre. De akkor az F folytatható egy R-nél nagyobb körre is. ↯

2. eset: $R = \infty$.

Ekkor F korlátos egészfüggvény, ezért konstans. De akkor $f = \varphi \circ F$ is konstans. ↯

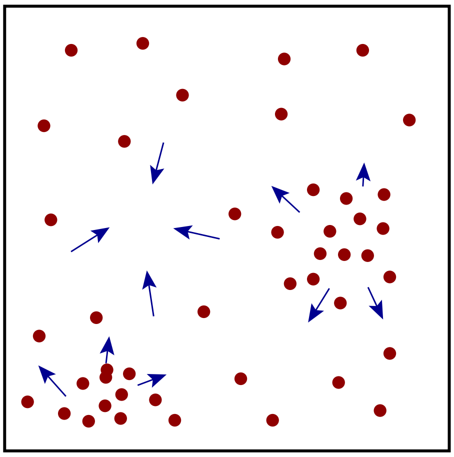
Az előbbi bizonyítást úgy is elmondhatjuk, hogy ha összekötjük z_0-t és z-t egy γ görbével, akkor ezt a görbét a lokális φ^{-1} függvények segítségével az egységkörbe képezhetjük.



Ha egy másik, γ_1 görbével kötjük össze z_0-t és z-t, akkor ugyanezt az $F(z)$ értéket kapjuk. Ugyanis γ és γ_1 homotóp $\mathbb{C}$-ben, emiatt $f \circ \gamma$ és $f \circ \gamma_1$ is homotóp a $C \setminus \{0, 1\}$ halmazban. Emiatt $f \circ \gamma$ és $f \circ \gamma_1$ ugyanabban a sorrendben metszi át a lila, a zöld és a kék szakaszokat, ez a lila–zöld–kék sorozat meghatározza, hogy melyik csempében lesz a végpont.

22. Harmonikus függvények

Laplace-operátor, harmonikus függvények. Laplace-egyenlet. Egy függvény akkor és csak akkor harmonikus, ha lokálisan egy holomorf függvény valós része. Maximum- és minimum-elv. Poisson-formula.



Hullámegyenlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} \right) = c^2 \cdot \Delta u$$

Laplace-operátor:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2} \qquad (= \operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla^2)$$

Definíció

- Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő, nyílt, és $u : D \to \mathbb{R}$. Az f függvény *harmonikus*, ha kétszer differenciálható, és teljesül rá a *Laplace-egyenlet*:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} = 0.$$

- Két változóban: $D \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő, nyílt. Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény harmonikus, ha kétszer differenciálható, és

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

- Szeretjük a $\mathbb{R}^2$ síkot a komplex számsíkkal azonosítani, és erre jó okunk van.

Trivialitás

Bármely $D \subset \mathbb{R}^n$ tartományra a harmonikus $D \to \mathbb{R}$ függvények vektorteret alkotnak.

Most csak a kétváltozós harmonikus függvényekkel fogunk játszani.

Tétel

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$. Az u akkor és csak akkor harmonikus, ha egy holomorf függvény valós része, vagyis van olyan $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelyre $u = \operatorname{Re} f$.

Következmény

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$. Az u akkor és csak akkor harmonikus, ha D minden pontjának van olyan környezete, ahol u egy holomorf függvény valós része.

Bizonyítás. (a) állítás: Ha u egy holomorf függvény valós része, akkor harmonikus:

Legyen $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$; a Cauchy–Riemann egyenletekből

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}v\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}v\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial}{\partial y}u\right) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}u$$
$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 0.$$

(b) állítás: Ha u harmonikus, akkor egy holomorf függvény valós része:

Emlékeztetőül, ha $f = u + iv$ és $f' = U + iV$, akkor

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad V = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Először f deriváltját találjuk ki. Legyen

$$U = \frac{\partial}{\partial x}u, \quad V = -\frac{\partial}{\partial y}u \quad \text{és} \quad g = U + iV.$$

A g holomorf, mert differenciálható, és teljesülnek a Cauchy–Riemann egyenletek:

$$\frac{\partial}{\partial x}U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial}{\partial y}u\right) = \frac{\partial}{\partial y}V,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}U = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial}{\partial y}u\right) = -\frac{\partial}{\partial x}V.$$

Legyen $f(z)$ a $g(z)$-nek egy olyan primitív függvénye, amelyre legalább egy pontban $f = u$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} f) = \operatorname{Re} f' = U = \frac{\partial}{\partial x}u, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} f) = -\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im} f) = -\operatorname{Im} f' = -V = \frac{\partial}{\partial y}u,$$

tehát $\operatorname{Re} f = u$.

Példák. *Ezek mind harmonikus függvények:*

- *Minden lineáris függvény;*
- $\arg z = \operatorname{Im}(\log z) = \operatorname{Re}(-i \cdot \log z)$ *(olyan halmazon, amely nem kerüli meg a 0-t;*
- $\log|z| = \operatorname{Re}\log z$. *Ez a függvény az egész $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ halmazon harmonikus, de nincs az egész halmazon olyan holomorf f, aminek $\log|z|$ lenne a valós része.*
- *Ha f holomorf, akkor $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\log|f|$, $\arg f$ is harmonikus.*

Tétel (középérték-tulajdonság)

Ha u harmonikus D-ben, akkor bármely $\overline{B}(c,r)$ körlemezre

$$u(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(c + re^{it}\big)\mathrm{d}t.$$

Bizonyítás. A valós rész operáció felcserélhető az integrálással. Ha $u = \operatorname{Re} f$, akkor

$$u(c) = \operatorname{Re} f(c) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(c + re^{it}\big)\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\operatorname{Re} f\big(c + re^{it}\big)\Big)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(c + re^{it}\big)\mathrm{d}t.$$

Megfordítás?

A középérték-tulajdonság önmagában leírja a harmonikus függvényeket. A következő fejezetben bebizonyítjuk.

Tétel (maximum- és minimumelv)

Ha u harmonikus D-ben és nem konstans, akkor

(a) u-nak nem létezik lokális maximuma és minimuma.

(b1) Ha $z_1, z_2, \ldots \in D$, $\lim z_n = w$, és $u(z_n) \to \sup u$ vagy $u(z_n) \to \inf u$, akkor w a D határán van.

(b2) Ha D korlátos, és u folytonos a D lezártján, akkor u a maximumát és a minimumát csak a határon veszi fel.

Bizonyítás. Legyen lokálisan $u = \operatorname{Re} f$; alkalmazzuk a holomorf maximum-elvet az e^f és az e^{-f} függvényekre:

$$|e^f| = e^u, \qquad |e^{-f}| = e^{-u}.$$

Poisson-formula

Mi lehet a Cauchy-formula megfelelője harmonikus függvényekre?

Tegyük fel, hogy u harmonikus a zárt egységkörön, $a \in \mathbb{D}$ rögzített.

Középérték-tulajdonság az $U(\zeta) = u\left(\dfrac{\zeta + a}{1 + \bar{a}\zeta}\right)$ függvényre:

$$u(a) = U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} U(\zeta)\,|\mathrm{d}\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} u\Bigg(\underbrace{\frac{\zeta + a}{1 + \bar{a}\zeta}}_{w}\Bigg)\,|\mathrm{d}\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} u(w)\left|d\frac{w-a}{1-\bar{a}w}\right|.$$

$$d\frac{w-a}{1-\bar{a}w} = \left(\frac{w-a}{1-\bar{a}w}\right)'\mathrm{d}w = \frac{1(1-\bar{a}w) - (w-a)(-\bar{a})}{(1-\bar{a}w)^2}\mathrm{d}w = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}w)^2}\mathrm{d}w$$

Tehát, felhasználva, hogy $|1 - \bar{a}w| = |\overline{w}w - \bar{a}w| = |\overline{w} - \bar{a}| = |w - a|$,

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} u(w)\cdot\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}w|^2}\,|\mathrm{d}w| = \int_{|w|=1} u(w)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-|a|^2}{|w-a|^2}\right)|\mathrm{d}w|.$$

Legyen $a = re^{i\varphi}$, $w = e^{it}$. A $\dfrac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}w|^2}$ tört két fontos alakja:

$$\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}w|^2} = \frac{1-|a|^2}{|w-a|^2} = \frac{\operatorname{Re}\big((w+a)(\overline{w}-\overline{a})\big)}{(w-a)(\overline{w}-\overline{a})} = \operatorname{Re}\frac{(w+a)(\overline{w}-\overline{a})}{(w-a)(\overline{w}-\overline{a})} = \operatorname{Re}\frac{w+a}{w-a}$$

és

$$\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}w|^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}w)(1-a\overline{w})} = \frac{1-|a|^2}{1-(\overline{a}w+a\overline{w})+|a|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-t)+r^2}.$$

Ezeket beírva:

$$u(a) = \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\frac{e^{it}+a}{e^{it}-a}\right)\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-t)+r^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Tétel (Poisson-formula)

Ha u harmonikus a zárt egységkörön, akkor minden $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}$-re

$$u(z) = u(re^{i\varphi}) = \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot P(r,\varphi-t)\mathrm{d}t$$

ahol

$$P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos\theta+r^2)},$$

a $P(r,\theta)$ függvény a *Poisson-magfüggvény* vagy *Poisson-kernel*.

Tétel (a Poisson-magfüggvény tulajdonságai)

$P(r,t)$ folytonos, pozitív, és $\int_{t=0}^{2\pi} P(r,t)\mathrm{d}t = 1$.

Bizonyítás. Poisson-formula a konstans 1 függvényre. □

A kör minden belső pontjában u értéke a határon felvett értékek súlyozott átlaga; a Poisson-mag értékei a súlyok.

A holomorf függvény felírása integrál alakban

A Poisson-kernel első alakjából felírhatunk egy olyan holomorf függvényt, amelynek u a valós része.

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\left(\operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\mathrm{d}t = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathrm{d}t\right).$$

Az $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathrm{d}t$ paraméteres integrál holomorf; ennek a holomorf függvénynek a valós része az u.

A valós rész helyett vehetjük a képzetes részt is, így felírhatjuk az u-hoz tartozó egyik v függvényt is (az u *harmonikus konjugáltját*); lehet parciális deriváltakat venni stb.

Cauchy- vs. Poisson-formula

Ha f holomorf a zárt egységkörön, akkor $\mathrm{Re}\, f$ és $\mathrm{Im}\, f$ is harmonikus, ezért a kör belsejében

$$f(z) = \int_{t=0}^{2\pi} f(e^{it}) \cdot P(r, \varphi - t)\mathrm{d}t.$$

A Cauchy-formulát is átírhatjuk ilyen alakba. Mivel a körvonalon $\mathrm{d}w = iw\,|\mathrm{d}w|$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \int_{|w|=1} f(w) \cdot \frac{w}{2\pi(w-z)}|dw| = \int_{|w|=1} f(w) \cdot C(z,w)|dw|.$$

A $C(z,w) = \dfrac{w}{2\pi(w-z)}$ magfüggvény integrálja is 1, de a függvény nem hogy nem pozitív, de még csak nem is valós értékű. Ezen úgy segítünk, hogy a Cauchy-formulában szereplő $\frac{1}{w-z}$-hez hozzádunk egy holomorf függvényt; a Cauchy-alaptétel miatt ez nem változtatja meg az integrál értékét:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} f(w)\left(\frac{1}{w-z} + \frac{\overline{z}}{\underbrace{1}_{w\overline{w}} - \overline{z}w}\right) \underbrace{iw\,|\mathrm{d}w|}_{\mathrm{d}w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} f(w)\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}\,|\mathrm{d}w|.$$

A Poisson- és a Cauchy-formula között a különbség: egy holomorf függvény.

23. Dirichlet-feladat

A Dirichlet-feladat. A Dirichlet-feladat megoldása az egységkörlemezen. A harmonikus függvények jellemzése a középértéktulajdonsággal.

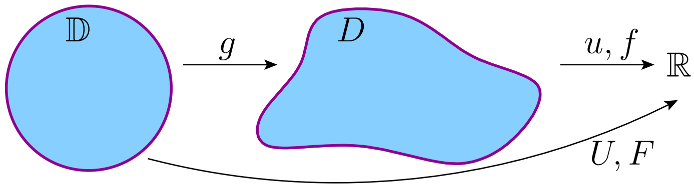
Dirichlet-feladat

Adott egy D Jordan-tartomány, továbbá egy folytonos $u : \partial D \to \mathbb{R}$ függvény. Terjesszük ki u-t olyan $\overline{D} \to \mathbb{R}$ függvénnyé, amely folytonos, és a tartomány belsejében harmonikus.

Tétel

A Dirichlet-feladatnak egyetlen, egyértelmű megoldása van.

Először visszavezetjük arra az esetre, ha D az egységkör.



Legyen $g : \mathbb{D} \to D$ konform megfeleltetés; a Caratheodory-tétel szerint ez folytonosan kiterjed a határra.

Az egységkörvonalon legyen $U(z) = u(g(z))$. Bármely $u : D \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor megoldása a Dirichlet-feladatnak, ha az $u \circ g$ függvény megoldása a Dirichlet-feladatnak az egységkörön az U függvénnyel:

u harmonikus D-n $\Leftrightarrow$ $u = \operatorname{Re} f$ egy $f \in \mathcal{O}(D)$ függvénnyel $\Leftrightarrow$ $U = \operatorname{Re}(f \circ g)$ egy $f \in \mathcal{O}(D)$ függvénnyel $\Leftrightarrow$ $U = \operatorname{Re} F$ egy $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ függvénnyel $\Leftrightarrow$ U harmonikus $\mathbb{D}$-n

Tétel (a Dirichlet-feladat megoldása az egységkörlapon)

Legyen $u : \{|z| = 1\} \to \mathbb{R}$ folytonos. Az u egyetlen folytonos kiterjesztése a zárt körlapra, amely a kör belsejében harmonikus:

$$U(re^{i\varphi}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot P(r, t-\varphi)\mathrm{d}t & \text{ha } r < 1; \\ u(e^{it}) & \text{ha } r = 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ezeket kell ellenőriznünk:

(1) U harmonikus a kör belsejében;

(2) U folytonos a határon;

(3) Ha U_1 is megoldása a feladatnak, akkor $U = U_1$.

1. állítás: $U(z)$ harmonikus a kör belsejében.

Ahogy már láttuk, $z = e^{i\varphi}$ esetén

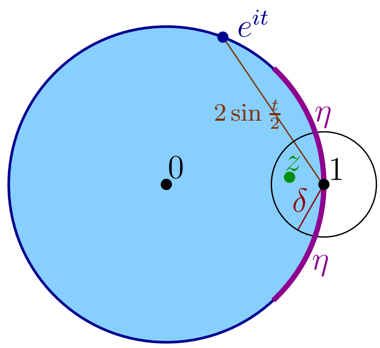
$$U(z) = \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot P(r, t-\varphi)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot \left(\operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathrm{d}t\right).$$

Az $F(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathrm{d}t\right)$ holomorf, és $U = \mathrm{Re}\, F$.

2. állítás: $U(z)$ folytonos a határon.

Elég az 1-beli folytonosságot igazolni.



A feltétel szerint a határon U folytonos; azt kell igazolni, hogy

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} U(z) = u(1).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott; ehhez keresünk $\delta-t$.
Legyen $K = \max|u(e^{it})|$. Van egy olyan $0 < \eta < \pi$, hogy $|t| < \eta$ esetén $\left|u(e^{it}) - u(1)\right| < \varepsilon/2$.
A δ most még titok, de biztos, hogy $\delta \leqslant \frac{\eta}{4}$. Ha $z \in \mathbb{D} \cap B(1,\delta)$.

$$\left|U(z)-u(1)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(1)\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\left|u(e^{it})-u(1)\right|\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\mathrm{d}t$$

Az integrált máshogy becsüljük a 0-hoz közel és távol.

$$\left|U(z)-u(1)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\left|u(e^{it})-u(1)\right|\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\mathrm{d}t$$

Az 1-hez közel, vagyis ha $0 \leqslant t \leqslant \eta$ vagy $2\pi-\eta \leqslant t \leqslant 2\pi$, akkor $|u(e^{it})-u(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\eta} + \int_{2\pi-\eta}^{2\pi}\right) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az 1-től távol, vagyis ha $\eta \leqslant t \leqslant 2\pi-\eta$, akkor $|u(e^{it})-u(1)| \leqslant 2K$,

$$|z| > 1-\delta \quad \text{és} \quad 1-|z|^2 = \big(1+|z|\big)\big(1-|z|\big) < 2\delta,$$
$$\left|e^{it}-1\right| \geqslant \left|e^{i\eta}-1\right| = 2\sin\frac{\eta}{2} > 2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\eta}{2} > \frac{\eta}{2} \quad \text{és} \quad |z-1| < \delta \leqslant \frac{\eta}{4},$$
$$\left|e^{it}-z\right| \geqslant \left|e^{it}-1\right| - |z-1| > \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{4},$$
$$\int_{\eta}^{2\pi-\eta} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{2\pi-\eta} 2K\cdot\frac{2\delta}{(\eta/4)^2}\mathrm{d}t < \frac{64K\delta}{\eta^2}.$$

Tehát, $|U(z)-u(1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{64K\delta}{\eta^2}$; ha $\delta \leqslant \frac{\eta^2\varepsilon}{128K}$, akkor ez kisebb, mint ε.
A választásunk: $\delta = \min\left(\frac{\eta}{4}, \frac{\eta^2\varepsilon}{128K}\right)$.

3. állítás: Ha U_1 is megoldása a feladatnak, akkor $U = U_1$.

Legyen $U_2 = U - U_1$. Ez is folytonos, és a kör belsejében harmonikus; a határon $U = U_1$.

A maximum-elv miatt U_2 a határon felveszi a minimumát és a maximumát is, tehát mindkettő 0.

Akkor viszont U_2 a konstans 0, vagyis $U = U_1$.

Tétel (a középérték-tulajdonság megfordítása)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$ folytonos. Tegyük fel, hogy minden $c \in D$-hez van olyan $r_0 > 0$, hogy bármely $0 < r < r_0$ esetén

$$u(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} u(c + re^{it}) \mathrm{d}t.$$

Ekkor u harmonikus függvény.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ körlemez, amelyre $\overline{\mathcal{K}} \subset D$; azt fogjuk igazolni, hogy u harmonikus $\mathcal{K}$ belsejében. Ha ez minden $\mathcal{K}$-ra igaz, akkor u a teljes D-n harmonikus.

Az u függvény folytonos a $\mathcal{K}$ határán; legyen U a Dirichlet-feladat megoldása a $\mathcal{K}$ körre, a határon az u függvénnyel. Ekkor U is folytonos, a $\mathcal{K}$ belsejében igaz rá a középérték-tulajdonság, és a körlemez határán $U = u$.

Vizsgáljuk az $U_1 = U - u$ függvényt. Erre is folytonos, igaz rá a középérték-tulajdonság, és a $\mathcal{K}$ határán $U_1 = 0$. Ebből fogjuk bebizonyítani, hogy U_1 az egész körlapon 0, mert akkor $u = U$, és akkor u harmonikus.

Állítás: Ha U_1 folytonos $\overline{\mathcal{K}}$-n, a körvonalon 0, és minden $c \in \mathcal{K}$-hoz van olyan $r_0 > 0$, hogy bármely $0 < r < r_0$ esetén $U_1(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} U_1(c + re^{it}) \mathrm{d}t$, akkor $U_1 = 0$.

Bizonyítás. Legyen $M = \max U_1$; mivel a határon $U_1 = 0$, $M \geqslant 0$. A célunk igazolni: $M = 0$.

Legyen $H = \{z \in \mathcal{K} : U_1(z) = M\}$. Mivel U_1 folytonos, a H halmaz relatív zárt.

Megmutatjuk, hogy H nyílt is.

Bármely $c \in H$-hoz van olyan $r_0 > 0$, hogy $0 < r < r_0$ esetén

$$M = U_1(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} U_1(c + re^{it}) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} M \mathrm{d}t = M.$$

Ez csak úgy lehet, ha az egész $|z - c| = r$ körvonalon $U_1 = M$.
De ez minden $0 < r < r_0$ esetén igaz, tehát a teljes $B(c, r_0)$ körlapon $U_1 = M$, tehát $B(c, r_0) \subset H$.
Mindez bármelyik $c \in H$-ra elmondható, tehát H nyílt.

$H \subset \mathcal{K}$ egyszerre nemüres, relatív zárt és nyílt, tehát $H = \mathcal{K}$.
A $\mathcal{K}$ belsejében $U_1 = M$, a határon $U_1 = 0$; a folytonosság miatt ez csak úgy lehet, ha $M = 0$.

Ugyanígy, $\min U_1 = 0$, tehát U_1 konstans 0.

Kitekintés: Mese a jó magfüggvényekről

Egy 2π szerint periodikus $f(t)$ függvényt Fourier-sorba szeretnénk fejteni:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}.$$

Ha van ilyen sor, és egyenletesen vagy L_2-ben konvergens, akkor

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cdot e^{-ins} \mathrm{d}s.$$

Vajon ha ezekkel az együtthatókkal írjuk fel a Fourier-sort, konvergálni fog pontonként az f-hez? Az N-edik részletösszeg

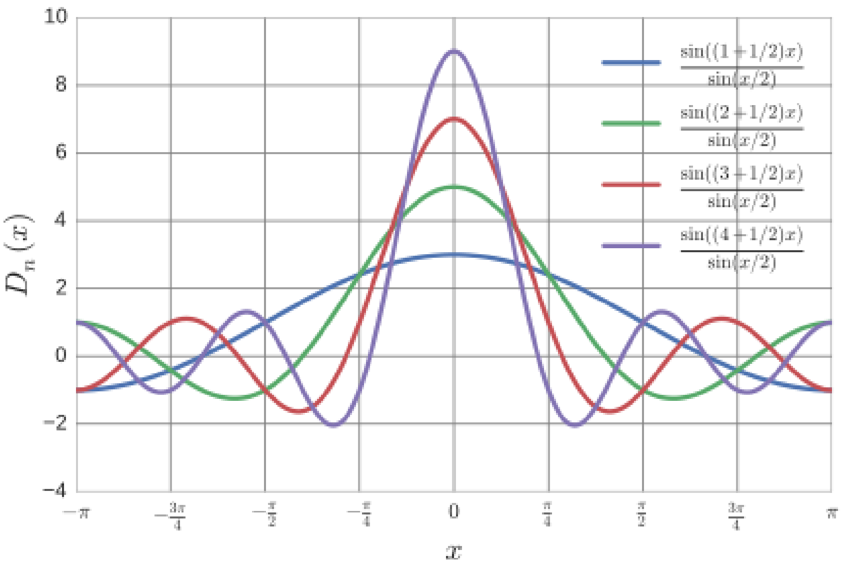
$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{n\cdot 2\pi i t} = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cdot e^{-n\cdot 2\pi i s}\mathrm{d}t\right)e^{n\cdot 2\pi i t}$$

$$=\int_0^{2\pi} f(s)\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{n\cdot 2\pi i(t-s)}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(s)D_N(t-s)\mathrm{d}t;$$

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{n\cdot 2\pi i t} = \frac{\sin{(N+\frac{1}{2})t}}{2\pi\cdot\sin\frac{1}{2}t}$$

az N-edik *Dirichlet-magfüggvény*.

Ha $N\to\infty$, akkor a Dirichlet-magfüggvény nem viselkedik elég szépen, például $\int_0^{2\pi}|D_N|\to\infty$, és $f(t)$ folytonosságából még nem következik, hogy hogy a Fourier-részletösszegek pontonként f-hez tartanának.



Fejér Lipót ötlete volt, hogy a részletösszegek átlagát vizsgálja:

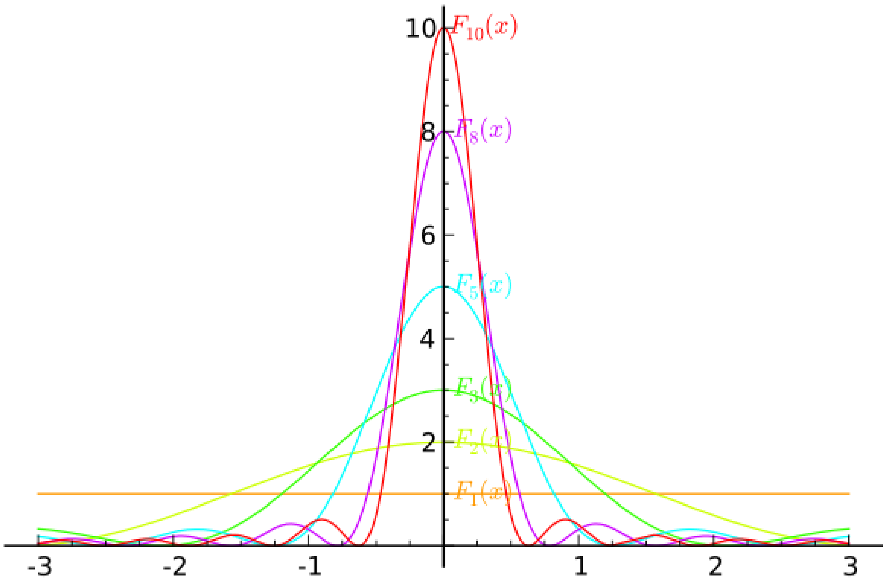
$$\sigma_N(t) = \frac{s_0(t)+s_1(t)+\ldots+s_{N-1}(t)}{N}$$

$$=\int_0^{2\pi} f(s)\frac{D_0(t)+D_1(t)+\ldots+D_{N-1}(t)}{N}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} f(s)F_N(t-s)\mathrm{d}t;$$

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi N}\left(\frac{\sin\, Nt}{\sin\,\frac{1}{2}t}\right)^2$$

az N-edik *Fejér-magfüggvény*.

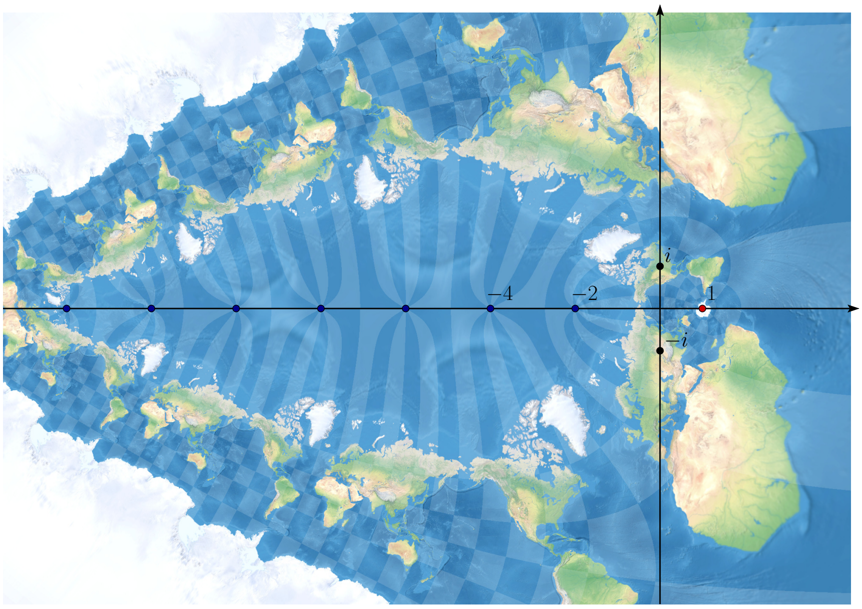
A Fejér-magfüggvény nemnegatív, és ha $N\to\infty$, akkor az integrálja a 0-ba koncentrálódik; ha $f(t)$ folytonos, akkor a Fourier-részletösszegek átlaga pontonként tart f-hez.



A Poisson- és a Fejér- magfüggvények bizonyos értelemben "jó" magfüggvények...

Bővebben: → függvénysorok, Fourier-analízis

51. Riemann-zeta függvény



$\zeta(s)$

Az Euler–Riemann féle ζ függvény

Definíció

$\operatorname{Re} s > 1$ esetén

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Hagyományosan $\operatorname{Re} s = \sigma$, $\operatorname{Im} s = t$ vagyis $s = \sigma + it$.

Tétel

$\sigma > 1$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ sor abszolút konvergens, az összegfüggvény holomorf.

Bizonyítás. Ha $\sigma_0 > 1$, akkor a $\sigma > \sigma_0$ félsíkban $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ közös konvergens majoráns.

Következmény

$\operatorname{Re} s > 1$ esetén

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

Tétel (Euler-szorzat)

$\operatorname{Re} s > 1$ esetén $\displaystyle\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$.

Bizonyítás. A lényeg: ha $2^K \geqslant N$, akkor

$$\prod_{p\leqslant N}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots+\frac{1}{p^{Ks}}\right)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{N^s}+\text{néhány további }\frac{1}{n^s}\text{ tag.}$$

$$\forall s\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists N_0\qquad \sum_{n=N_0+1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<\varepsilon$$

$$\forall s\ \ \forall\varepsilon\ \ \exists N_0(s,\varepsilon)\ \ \forall N\geqslant N_0\ \ \forall K\geqslant N$$

$$\left|\prod_{p\leqslant N}\left(1+\frac{1}{p^s}+\ldots+\frac{1}{p^{Ks}}\right)-\left(1+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{N^s}\right)\right|\leqslant\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<\varepsilon$$

$K\to\infty$:
$$\forall s\quad \forall\varepsilon\quad \exists N_0(s,\varepsilon)\quad \forall N\geqslant N_0(s,\varepsilon)\quad \left|\prod_{p\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}-\left(1+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{N^s}\right)\right|\leqslant\varepsilon$$

$N\to\infty$:
$$\forall s\quad \forall\varepsilon\quad \left|\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}-\zeta(s)\right|\leqslant\varepsilon$$

$\varepsilon\to 0$:
$$\forall s\quad \left|\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}-\zeta(s)\right|=0.$$

Következmény

$\operatorname{Re} s>1$ esetén

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s};\qquad\Rightarrow\qquad \zeta(s)\neq 0.$$

$$\log\zeta(s)=\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot p^{ks}}$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=-\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{ks}}.$$

Ezek a sorok mind lokálisan egyenletesen konvergensek.

Definíció (von Mangoldt függvény)

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & \text{ha } n=p^k\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$

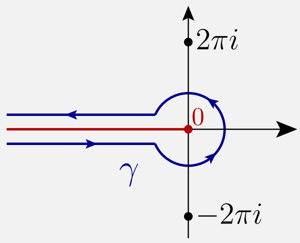
Ezzel a függvénnyel

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Tétel (Kiterjesztés az egész síkra)

A $\zeta(s)$ függvény kiterjeszthető az egész síkra, kivéve az $s = 1$ pontot, ahol elsőrendű pólusa van 1 reziduummal. Egy lehetséges kiterjesztés:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^{1-s}}{e^{-z}-1} \mathrm{d}z \qquad (s \neq 1)$$



Tétel (A ζ-függvény függvényegyenlete)

A ζ függvénynek van egy meglepő szimmetriája: az

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

függvényre igaz, hogy $\xi(1-s) = \xi(s)$ és $\xi\big(1-\overline{s}\big) = \overline{\xi(s)}$.

A ζ-függvény gyökei

A $\Gamma(s/2)$-nek egyszeres pólusa van a $-2, -4, -6, \ldots$ pontokban; tehát ott a $\zeta(s)$-nek egyszeres gyöke van; ezek a ζ függvény "triviális" gyökei.

A $\xi(s)$ értékei a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ egyenesen tisztán valósak. Ebből sejtette Riemann, hogy a nemtriviális gyökök mind ezen az egyenesen vannak.

Lemma

(a) Bármely pozitív egész N és $\sigma > 1$ esetén

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x.$$

(b) Speciálisan, $N = 1$ esetén

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_N^\infty \frac{\mathrm{d}\big([x]-N\big)}{x^s} = \left[\frac{[x]-N}{x^s}\right]_N^\infty - \int_N^\infty \Big([x]-N\Big)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^s}\right)$$

$$= -\int_N^\infty \Big(x - \{x\} - N\Big)\cdot\left(-sx^{-s-1}\mathrm{d}x\right) = s\int_N^\infty x^{-s}\mathrm{d}x - s\int_N^\infty x^{-s-1}\cdot\{x\}\mathrm{d}x - Ns\int_N^\infty x^{-s-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{s}{s-1} N^{1-s} - N^{1-s} - s \int_N^\infty x^{-s-1} \cdot \{x\} \mathrm{d}x = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x.$$

Tétel (kiterjesztés a jobb félsíkra)

A $\zeta(s)$ függvény holomorfan kiterjeszthető a jobb félsíkra az $s = 1$ pont kivételével, ahol elsőrendű pólusa van 1 reziduummal.

Bizonyítás. A Lemma szerint bármely N pozitív egész és $\sigma > 1$ esetén

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x.$$

Tetszőleges $\sigma_0 > 0$ esetén, a $\sigma > \sigma_0$ félsíkban az integrált egyenletesen majorálja az $\displaystyle\int_N^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{\sigma_0+1}}$ integrál, tehát egy holomorf függvényt állít elő.

A jobboldalon álló képlet a jobb félsíkon holomorf, kivéve az $s = 1$ pontot, ahol a reziduum $N^0 = 1$.

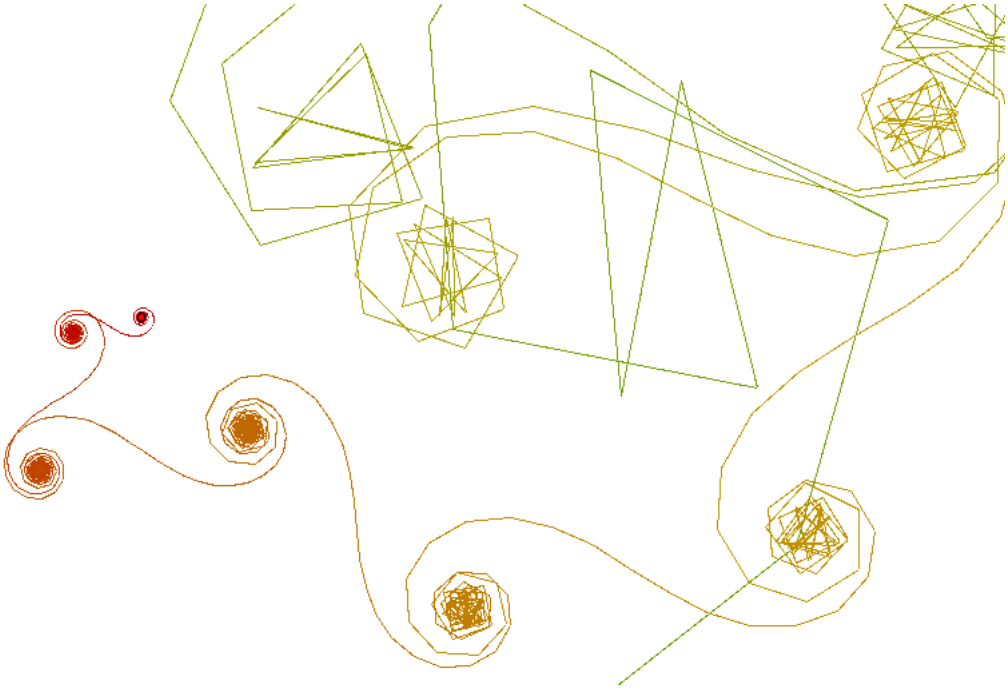
(A kiterjesztés nem függ attól, hogy melyik N-et választjuk.)

A $\sum \frac{1}{n^s}$ sor viselkedése

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \cdot N^{1-\sigma} \cdot e^{it \log N} - s \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x \quad (\sigma > 0)$$

- Az utolsó integrál 0-hoz tart.
- Ha $\sigma > 1$, akkor az $N^{1-s} = N^{1-\sigma} \cdot e^{it \log N}$ sorozat egy spirál mentén halad befelé.
- Ha $\sigma = 1$, akkor az $N^{1-s} = e^{it \log N}$ sorozat egy kör kerületén halad körbe.
- Ha $\sigma < 1$, akkor az $N^{1-s} = N^{1-\sigma} \cdot e^{it \log N}$ sorozat egy spirál mentén halad kifelé.



Az $\frac{1}{n^s}$ és $\frac{1}{(n+1)^s}$ tagok közötti szög:

$$\arg\tfrac{1}{(n+1)^s} - \arg\tfrac{1}{n^s} = -t\log(n+1) + t\log n \approx -\frac{t}{n}.$$

Amíg $n \ll |t|$, a tagok iránya látszólag össze-vissza ugrál. Amikor n és t nagyságrendje hasonló, a részletösszegek szép sima görbe darabok mentén haladnak.

Lemma

A $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $|t| > 3$ halmazon

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant t^2} \frac{1}{n^s} + O(1).$$

Bizonyítás. Legyen $N = [t^2]$. A kiterjesztés szerint

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant t^2} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x.$$

$$\left|\zeta(s) - \sum_{n\leqslant t^2}\frac{1}{n^s}\right| \leqslant \left|\frac{N^{1-s}}{s-1}\right| + |s|\int_N^\infty \frac{\{x\}}{|x^{s+1}|}\mathrm{d}x \leqslant \frac{N^{1-\sigma}}{|t|} + |s|\int_N^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{\sigma+1}} =$$

$$= \frac{N^{1-\sigma}}{|t|} + \frac{|s|}{\sigma N^\sigma} < \frac{|t|^{2(1-\sigma)}}{|t|} + \frac{\sigma+|t|}{\sigma\sqrt{t^2-1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = O(1).$$

Tétel

Tetszőleges $C > 0$-ra $|t| > 3$, $\sigma > \max\left(1 - \frac{C}{\log|t|}, 0\right)$ esetén

$$(a)\quad \zeta(s) = O(\log|t|); \qquad (b)\quad \zeta'(s) = O(\log^2|t|).$$

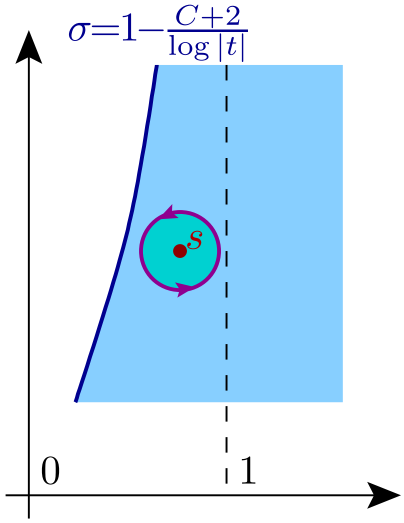
Bizonyítás. (a)

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} = e^{(1-\sigma)\log n}\cdot\frac{1}{n} < e^C\cdot\frac{1}{n}$$

$$\left|\zeta(s)\right| = \left|\sum_{n \leqslant t^2} \frac{1}{n^s} + O(1)\right| \leqslant e^C \sum_{n \leqslant t^2} \frac{1}{n} + O(1) = O(\log|t|).$$

(b) Elég $|t| > e^{C+2}$ esetén bizonyítani.

A $\sigma > 1 - \dfrac{C+2}{\log|t|}$ tartományon $|\zeta(s)| \leqslant O(\log|t|)$. Ez a tartomány tartalmazza a $\overline{B}\big(s, 1/\log|t|\big)$ körlemezt.



A deriváltra vonatkozó Cauchy-formulából

$$\left|\zeta'(s)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-s| = \frac{1}{\log|t|}} \frac{\zeta(w)}{(w-s)^2} \mathrm{d}w\right| < \max_{|w-s| = \frac{1}{\log|t|}} \frac{\left|\zeta(w)\right|}{|w-s|} \leqslant O\big(\log^2|t|\big).$$

Lemma (3 < 4)

$$3 + 4\cos x + \cos 2x \geqslant 0.$$

Bizonyítás.

$$3 + 4\cos x + \cos 2x = 3 + 4\cos x + \big(2\cos^2 x - 1\big) = 2(1 - \cos x)^2 \geqslant 0.$$

Lemma

$\sigma > 1$ esetén

$$\left|\zeta(\sigma)\right|^3 \cdot \left|\zeta(\sigma + it)\right|^4 \cdot \left|\zeta(\sigma + 2it)\right| \geqslant 1.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} & 3\log\left|\zeta(\sigma)\right| + 4\log\left|\zeta(\sigma+it)\right| + \log\left|\zeta(\sigma+it)\right| \\ &= 3\operatorname{Re}\log\zeta(\sigma) + 4\operatorname{Re}\log\zeta(\sigma+it) + \operatorname{Re}\log\zeta(\sigma+it) \\ &= 3\operatorname{Re}\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot p^{k\sigma}} + 4\operatorname{Re}\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot p^{k(\sigma+it)}} + \operatorname{Re}\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot p^{k(\sigma+2it)}} \\ &= \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot p^{k\sigma}} \Big(3 + 4\cos(kt\log p) + \cos(2kt\log p)\Big) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Tétel

$t \neq 0$ esetén

$$\zeta(1 + it) \neq 0.$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\sigma > 1$ esetén

$$\left|\zeta(\sigma)\right|^3 \cdot \left|\zeta(\sigma+it)\right|^4 \cdot \left|\zeta(\sigma+2it)\right| \geqslant 1$$

avagy

$$(\sigma-1)\cdot\left|(\sigma-1)\cdot\zeta(\sigma)\right|^3 \cdot \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 \cdot \left|\zeta(\sigma+2it)\right| \geqslant 1.$$

↯ Indirekt tegyük fel, hogy $\zeta(1+it)=0$; akkor

$$\lim_{\sigma\to 1}\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1} = \lim_{\sigma\to 1}\frac{\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)}{\sigma-1} = \zeta'(1+it)$$

véges szám.

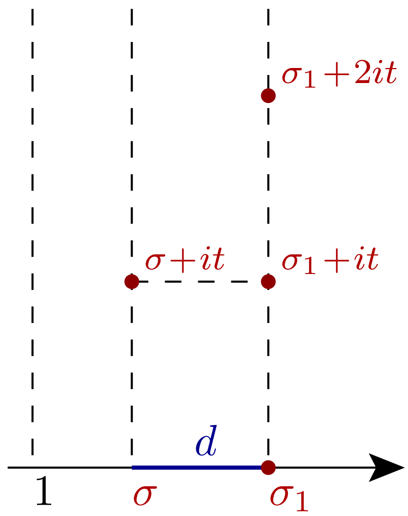
A $\zeta(s)$-nek elsőrendű pólusa van $s=1$-ben 1 reziduummal, ezért $\lim\limits_{\sigma\to 1+0}\big((\sigma-1)\zeta(\sigma)\big)=1$.
Tehát a $\sigma\to 1+0$ határátmenetből

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\sigma-1) & \cdot & \left|(\sigma-1)\cdot\zeta(\sigma)\right|^3 & \cdot & \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 & \cdot & \left|\zeta(\sigma+2it)\right| & \geqslant & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 1 & & \left|\zeta'(1+it)\right|^4 & & \left|\zeta(1+2it)\right| & \geqslant & 1 \quad ↯
\end{array}$$

Tétel

Alkalmas $A, a > 0$ konstansokkal, $\sigma \geqslant 1$ és $|t| \geqslant 3$ esetén $\left|\zeta(\sigma+it)\right| > \dfrac{A}{(\log|t|)^a}$.

Bizonyítás. Választani fogunk egy $\sigma_1 = \sigma + d$ számot, $0 < d < 1$.



Láttuk, hogy

$$\left|\zeta(\sigma_1)\right|^3 \cdot \left|\zeta(\sigma_1+it)\right|^4 \cdot \left|\zeta(\sigma_1+2it)\right| \geqslant 1.$$

Triviális, hogy $\zeta(\sigma_1) < 1 + \displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{\sigma_1}} = 1 + \frac{1}{\sigma_1-1} \leqslant 1 + \frac{1}{d} < \frac{2}{d}$.

Tudjuk, hogy $\left|\zeta(\sigma_0+2it)\right| < C_1\log|t|$ és $\left|\zeta'(\sigma+it)\right| < C_2\big(\log|t|\big)^2 \quad (C_1, C_2 > 0)$.

$$\left|\zeta(\sigma_1+it)\right| \geqslant \left|\zeta(\sigma_1)\right|^{-3/4}\left|\zeta(\sigma_1+2it)\right|^{-1/4} > \left(\frac{d}{2}\right)^{3/4}\big(C_1\log|t|\big)^{-1/4} = C_3\frac{d^{3/4}}{\big(\log|t|\big)^{1/4}}.$$

$$\left|\zeta(\sigma+it)\right| \geqslant \left|\zeta(\sigma_1+it)\right| - \int_\sigma^{\sigma_1}\left|\zeta'(x+it)\right|\mathrm{d}x > C_3\frac{d^{3/4}}{\big(\log|t|\big)^{1/4}} - C_2 d\big(\log|t|\big)^2.$$

Feltételezhetjük, hogy $C_2 \geqslant C_3$; egyébként C_2-t szabadon növelhetjük.
A d-t úgy választjuk, hogy a második tag fele legyen az elsőnek:

$$C_3 \frac{d^{3/4}}{\big(\log|t|\big)^{1/4}} = 2C_2 d\big(\log|t|\big)^2; \qquad d = \frac{(C_3/2C_2)^4}{\big(\log|t|\big)^9} < 1;$$

$$\big|\zeta(\sigma+it)\big| > C_2 d\big(\log|t|\big)^2 = \frac{A}{\big(\log|t|\big)^7}.$$

Következmény

$\sigma \geqslant 1$, $|t| \geqslant 3$ esetén

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right| < O\big(|\log t|^c\big).$$

Bizonyítás.

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right| = \frac{1}{\big|\zeta(\sigma+it)\big|} \cdot \big|\zeta'(\sigma+it)\big| \leqslant O\Big(\big(\log|t|)^a\Big) \cdot O\Big(\big(\log|t|)^2\Big).$$

52. Prímszámtétel

Definíció

$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1; \qquad \operatorname{li} x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leqslant x} \log p = \log\Bigg(\prod_{p\leqslant x} p\Bigg) \quad \text{(Csebisev-féle } \vartheta\text{-függvény)}$$

$$\psi(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) = \log \operatorname{lkkt}\big(1, 2, \dots, [x]\big) \quad \text{(Csebisev-féle } \psi\text{-függvény)}$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n<x} \Lambda(n) & \text{ha } x \text{ nem egész szám} \\ \sum\limits_{n<x} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) & \text{ha } x \text{ egész szám} \end{cases}$$

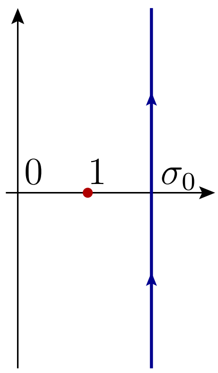
$$M(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu(n) \quad \text{(Mertens-féle } M\text{-függvény)}$$

Tétel (A prímszámtétel néhány ekvivalens formája)

Ezek az állítások ekvivalensek:

- $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}; \qquad \pi(x) \sim \operatorname{li} x$
- $\vartheta(x) \sim x; \qquad \psi(x) \sim x; \qquad \psi_0(x) \sim x$
- $\dfrac{M(x)}{x} \to 0$

Együtthatóformula változatok



Ha $X > 0$, $\sigma_0 > 1$, akkor ...

Együtthatóformula, 0. változat

Az integrálokat és szummákat teljesen szabálytalanul, össze-vissza cserebérélve:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2Ti}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT} X^s \mathrm{d}s = \begin{cases} 1 & \text{ha } X = 1 \\ 0 & \text{ha } X \neq 1; \end{cases}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2Ti}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)X^s\mathrm{d}s = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2Ti}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\Big(\frac{X}{n}\Big)^s\Big)\mathrm{d}s =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\Big(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2Ti}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT}\Big(\frac{X}{n}\Big)^s\mathrm{d}s\Big) = \Lambda(X)$$

Lemma (Együtthatóformula, 1. változat)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, s=\sigma_0}\frac{X^s}{s}\mathrm{d}s = \begin{cases} 1 & \text{ha } X > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } X = 1 \\ 0 & \text{ha } 0 < X < 1; \end{cases}$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, s=\sigma_0}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{X^s}{s}\mathrm{d}s = \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n) = \psi(X)$$

Előnye: pontosan $\psi(X)$-et állítja elő. Hátránya: feltételesen konvergens improprius integrált és szummát kell felcserélni.

Lemma (együtthatóformula, 2. változat)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, s=\sigma_0}\frac{X^s}{s^2}\mathrm{d}s = \begin{cases} \log x & \text{ha } X \geqslant 1, \\ 0 & \text{ha } 0 < X \leqslant 1; \end{cases}$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, s=\sigma_0}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{X^s}{s^2}\mathrm{d}s = \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\log\frac{X}{n}$$

Előnye: abszolút konvergens. Hátránya: Nem pontosan $\psi(X)$-et, hanem egyfajta átlagát adja meg.

Lemma (együtthatóformula, 3. változat)

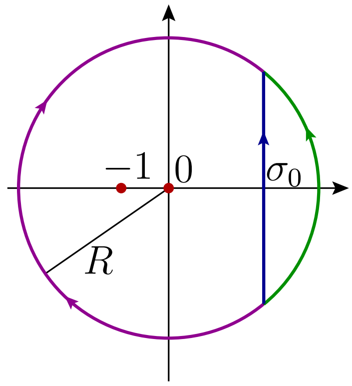
Ha $X > 0$, $\sigma_0 > 0$, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, s=\sigma_0}\frac{X^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{X} & \text{ha } X \geqslant 1, \\ 0 & \text{ha } 0 < X \leqslant 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Egyenes szakasz helyett köríven integrálunk.

Ha $0 < X \leqslant 1$, akkor a jobb köríven

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, s=\sigma_0}\frac{X^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_{)}\frac{X^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s = O(1/R).$$



Ha $X \geqslant 1$, akkor a bal köríven

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\sigma_0}\frac{X^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s =$$

$$= \operatorname*{Res}_{s=0}\frac{X^s}{s(s+1)} + \operatorname*{Res}_{s=-1}\frac{X^s}{s(s+1)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\subset}\frac{X^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s = 1 - \frac{1}{X} + O(1/R).$$

Lemma

Ha $X > 0$, $\sigma_0 > 1$, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\sigma_0}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{X^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s = \sum_{n\leqslant X}\left(1-\frac{n}{X}\right)\Lambda(n).$$

Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\sigma_0}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{X^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\sigma_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\frac{X^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\Lambda(n)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\sigma_0}\frac{(X/n)^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\cdot\begin{cases}1-\dfrac{n}{X} & \text{ha } \frac{X}{n}\geqslant 1,\\ 0 & \text{ha } 0<\frac{X}{n}\leqslant 1\end{cases}$$

$$= \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\left(1-\frac{n}{X}\right).$$

Megjegyzés. *Legyen* $\psi_1(X) = \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\left(1-\frac{n}{X}\right)$. *Ez a függvény éppen a* $\psi(X)$ *függvény Cesaro-átlaga:*

$$\frac{1}{X}\int_0^X\psi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{X}\int_0^X\left(\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\frac{1}{X}\int_n^X\psi(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\frac{X-n}{X}.$$

Tétel (Prímszámtétel [Georg Friedrich Bernhard Riemann, Jacques Salomon Hadamard, Charles-Jean de la Vallée Poussin])

$$\lim_{X\to\infty}\frac{\psi(X)}{X} = 1.$$

Bizonyítás. Továbbra is legyen

$$\psi_1(X) = \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\left(1-\frac{n}{X}\right) = \frac{1}{X}\int_0^X\psi;$$

először azt a gyengébb állítást igazoljuk, hogy

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2}.$$

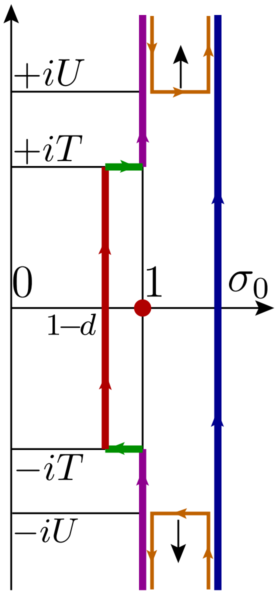
Azt már láttuk, hogy ha $X > 0$, $\sigma_0 > 1$, akkor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\, s=\sigma_0} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{X^s}{s(s+1)} \mathrm{d}s = \sum_{n\leqslant X} \left(1 - \frac{n}{X}\right) \Lambda(n) = \psi_1(X);$$

X-szel elosztva,

$$\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\, s=\sigma_0} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{X^{s-1}}{s(s+1)} \mathrm{d}s.$$

Vegyünk egy $T > 3$ számot, és ehhez egy $d = d(T)$-t úgy, hogy a $|t| \leqslant T$, $\sigma \geqslant 1 - d$ halmazon $\zeta \neq 0$. Ezen kívül legyen $U > T$ és $X > 1$ szintén tetszőleges.



Rögzített T, d, X esetén a kék, lila és barna szakaszokon X^s korlátos, $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O\big((\log|t|)^a\big)$, az integrandus nagyságrendje legfeljebb $O(\frac{(\log|t|)^a}{t^2})$. Emiatt az integrálok léteznek, sőt, ha $U \to \infty$, akkor barna görbéken vett integrálok 0-hoz tartanak (miközben konstansok), tehát a barna vonalakon az integrál 0.

A reziduumtétel miatt

$$\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{kék}} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{X^{s-1}}{s(s+1)} \mathrm{d}s$$

$$= \operatorname*{Res}_{s=1} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{X^{s-1}}{s(s+1)} + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\text{barna}} + \int_{\text{lila}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{bordó}} \right).$$

Az $\zeta(s)$-nek elsőrendű pólusa van az $s = 1$-ben, ezért $\operatorname*{Res}_{s=1} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -1$, és

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{X^{s-1}}{s(s+1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\text{barna}} + \int_{\text{lila}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{bordó}} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{X^{s-1}}{s(s+1)} \mathrm{d}s \right).$$

A lila szakaszokon $|\int_{\text{lila}}| < c\int_T^\infty \frac{(\log t)^a}{t^2}\mathrm{d}t = O\big(\frac{(\log T)^a}{T}\big)$.
A zöld szakaszokon $|X^{s-1}| < 1$, $|\int_{\text{zöld}}| < O_T(d)$ (az ordó-konstans függ T-től).
A bordó szakaszon $|\int_{\text{bordó}}| < O_{T,d}(X^{-d})$ (az ordó-konstans függ T-től és d-től is).

$$\left|\frac{\psi_1(X)}{X} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left|\int_{\text{lila}}\right| + \left|\int_{\text{zöld}}\right| + \left|\int_{\text{bordó}}\right| \leqslant O\left(\frac{(\log T)^a}{T}\right) + O_T(d) + O_{T,d}(X^{-d}).$$

Rögzítjük T, d-t és $X \to \infty$:

$$\limsup_{X\to\infty}\left|\frac{\psi_1(X)}{X} - \frac{1}{2}\right| \leqslant O\left(\frac{(\log T)^a}{T}\right) + O_T(d).$$

Most $d \to 0$:

$$\limsup_{X\to\infty}\left|\frac{\psi_1(X)}{X} - \frac{1}{2}\right| \leqslant O\left(\frac{(\log T)^a}{T}\right)$$

Végül $T \to \infty$:

$$\limsup_{X\to\infty}\left|\frac{\psi_1(X)}{X} - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0,$$

vagyis

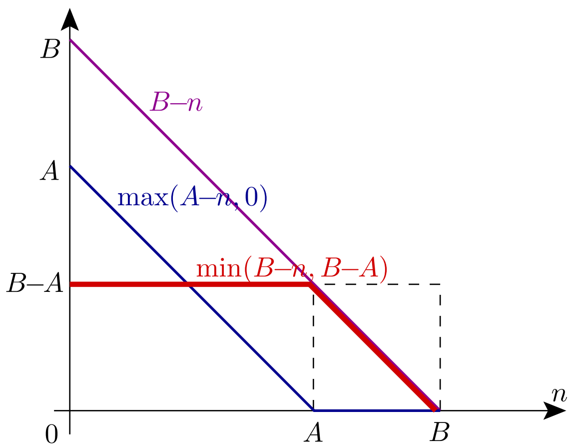
$$\lim_{X\to\infty}\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2}.$$

Most már tudjuk, hogy $\lim\limits_{X\to\infty}\dfrac{\psi_1(X)}{X} = \dfrac{1}{2}$.

$0 < A < B$-re vizsgáljuk $A \cdot \psi_1(A)$ és $B \cdot \psi_1(B)$ különbségét:

$$B \cdot \psi_1(B) - A \cdot \psi_1(A) = \sum_{n\leqslant B}(B-n)\Lambda(n) - \sum_{n\leqslant A}(A-n)\Lambda(n) =$$

$$= \sum_{n\leqslant A}(B-A)\Lambda(n) + \sum_{A<n\leqslant B}(B-n)\Lambda(n).$$



A $\Lambda(n)$ együtthatója az első összegben $B-A$; a második összegben $(B-A)$-ről indulva lineárisan lecseng 0-ig. A $\Lambda(n)$ közben nemnegatív. Ezért,

$$\sum_{n\leqslant A}(B-A)\Lambda(n) \leqslant B \cdot \psi_1(B) - A \cdot \psi_1(A) \leqslant \sum_{n\leqslant B}(B-A)\Lambda(n)$$

$$(B-A)\psi(A) \leqslant B \cdot \psi_1(B) - A \cdot \psi_1(A) \leqslant (B-A)\psi(B).$$

$$(B-A)\psi(A) \leqslant B \cdot \psi_1(B) - A \cdot \psi_1(A) \leqslant (B-A)\psi(B).$$

Legyen $0 < \delta < 1$, és írjuk fel az előbbi becslést az $((1-\delta)X, X)$ és az $(X, (1+\delta)X)$ párral is:

$$X\psi_1(X) - (1-\delta)X \cdot \psi_1\big((1-\delta)X\big) \leqslant \delta X \cdot \psi(X) \leqslant (1+\delta)X \cdot \psi_1\big((1+\delta)X\big) - X\psi_1(X)$$

Osszunk δX^2-tel:

$$\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\psi_1(X)}{X} - \frac{(1-\delta)^2}{\delta} \cdot \frac{\psi\big((1-\delta)X\big)}{(1-\delta)X} \leqslant \frac{\psi(X)}{X} \leqslant \frac{(1+\delta)^2}{\delta} \cdot \frac{\psi_1\big((1+\delta)X\big)}{(1+\delta)X} - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\psi_1(X)}{X}$$

Most $X \to \infty$:

$$\frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(1-\delta)^2}{\delta} \cdot \frac{1}{2} \leqslant \liminf_{X\to\infty} \frac{\psi(X)}{X} \leqslant \limsup_{X\to\infty} \frac{\psi(X)}{X} \leqslant \frac{(1+\delta)^2}{\delta} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{\delta}{2} \leqslant \liminf_{X\to\infty} \frac{\psi(X)}{X} \leqslant \limsup_{X\to\infty} \frac{\psi(X)}{X} \leqslant 1 + \frac{\delta}{2}.$$

Végül $\delta \to +0$:

$$1 \leqslant \liminf_{X\to\infty} \frac{\psi(X)}{X} \leqslant \limsup_{X\to\infty} \frac{\psi(X)}{X} \leqslant 1,$$

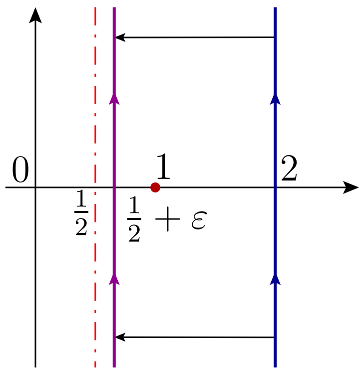
vagyis

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\psi(X)}{X} = 1.$$

KÉSZ.

Ha igaz a Riemann-sejtés ...?

Jól ismert, hogy a ζ-függvénynek végtelen sok gyöke van a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ egyenesen. A Riemann-sejtés szerint a nemtriviális gyökök mind ezen az egyenesen vannak, és nincsenek többszörös gyökök. Ha igaz a Riemann-sejtés, akkor a lila-zöld-bordó töröttvonal helyett a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2} + \varepsilon$ egyenesen is integrálhatunk, ahol az integrál nagyságrendje $O(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.



A prímszámtétel néhány hibatagos alakja, ha a Riemann-sejtés igaz:

$$\psi(X) = X + O\big(\sqrt{X}\log^2 X\big);$$
$$\pi(X) = \operatorname{li} X + O\big(\sqrt{X}\log X\big).$$

És ha nem igaz a Riemann-sejtés ...?

Ahol $\zeta(s) = 0$, ott $\frac{\zeta'}{\zeta}$-nak elsőrendű pólusa van. Ha az integrációs utat áttoljuk egy gyökön, az ottani reziduum ad egy X-hatvány nagyságrendű plusz hibatagot.

Az összes reziduum öszegéből kapható az "explicit" formula:

$$\psi_0(X) = X - \sum_{\rho} \frac{X^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - X^{-2}).$$

A szumma a $0 < \sigma < 1$ sávba eső, a képzetes rész szerint rendezett gyökökön fut végig.

Felismerhetjük, hogy

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \cdot \frac{X^s}{s} \right) = X$$

és ha ρ gyöke $\zeta(s)$-nek, akkor

$$\operatorname*{Res}_{s=\rho}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \cdot \frac{X^s}{s} \right) = -\frac{X^\rho}{\rho}.$$

A Riemann-sejtéstől függetlenül?

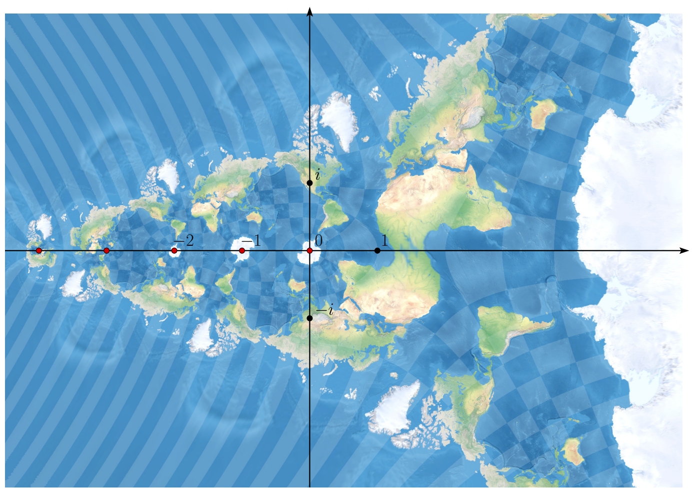
- de la Vallée Poussin, 1899:
  - $\zeta(s) \neq 0$, ha $\sigma > 1 - \dfrac{C}{\log|t|}$
  - $\psi(X) = X + O\Big(Xe^{-a\sqrt{\log X}}\Big)$
  - $\pi(X) = \operatorname{li} X + O\Big(Xe^{-b\sqrt{\log X}}\Big)$
- ... Hardy, Littlewood, Weyl, Vinogradov, ...
- Vinogradov, 1958:
  - $\zeta(s) \neq 0$, ha $\sigma > 1 - \dfrac{C}{(\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}}$
  - $\psi(X) = X + O\Big(Xe^{-a(\log X)^{3/5}(\log\log X)^{1/5}}\Big)$
  - $\pi(X) = \operatorname{li} X + O\Big(Xe^{-b(\log X)^{3/5}(\log\log X)^{1/5}}\Big)$

Bővebben:

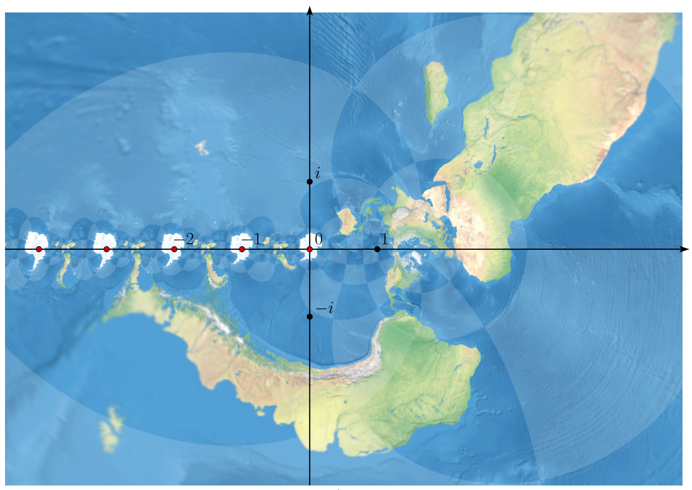
- E. Landau: Handbuch Der Lehre Von Der Verteilung Der Primzahlen
- K. Prachar: Primzahlverteilung
- I. M. Vinogradov – A. A. Karatsuba: The method of trigonometric sums in number theory
- Analitikus számelmélet kurzus

További fejezetek, előkészületben

50. Gamma-függvény



$\Gamma(s)$



$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)$

Szorzat- és integrál alak

Függvényegyenletek

Stirling-formula

30. Analitikus folytatás

35. Runge approximációs tétele

40. Mittag–Leffler feladat

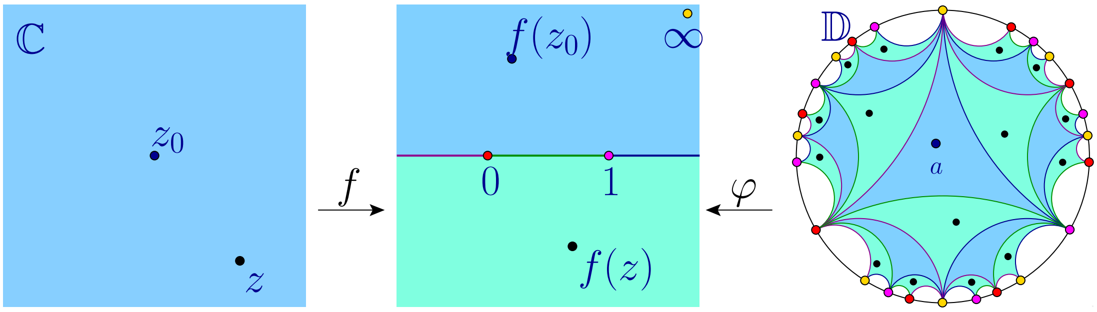
41. Weierstrass-feladat

45. Riemann-felületek

46. A Picard-tételek

Végig használni fogjuk az $\mathcal{R} = \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ *Riemann-felület*et. Az egységkörlemezt (amit azonosítunk a Poincaré-féle körmodellel) kicsempézzük háromoldalú tartományokkal, ez a kicsempézett körmodell lesz az $\mathcal{R}$ Riemann-felület *univerzális fedése*, pontosabban az univerzális fedés egy lehetséges beágyazása a komplex síkba. Azért, hogy az univerzális fedést kihangsúlyozzuk, a kicsempézett körmodellt $\mathcal{U}$-val fogjuk jelölni.

Vegyünk fel az egységkör (a körmodell) határán három pontot, és ezeket kössük össze, az egségkörvonalra merőleges körívekkel. Legyen φ az az egyetlen konform megfeleltetés, amely a három körív közötti végtelen háromszöget megfelelteti a felső félsíknak úgy, hogy a három csúcs képe a 0, az 1 és a ∞. Az illusztráció kedvéért a felső és az alsó félsíkot, a 0, 1 és ∞-nek megfelelő pontokat, valamint az ezeket elválasztó $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, \infty)$ valós intervallumokat is kiszínezhetjük egy-egy színnel.



A háromszöget mindegyik oldalívére tükrözzük, és a tükrözési elv segítségével a φ függvényt kiterjesztjük a szomszédos tükörképekre. Ezt ismételjük újra meg újra; ilyen módon az egész komplex egységkört kicsempézzük a kiinduló háromszög tükörképeivel, és a φ függvényt kiterjesztjük $\mathcal{U} \to \mathcal{R}$ holomorf függvénnyé.

A kiterjesztett φ függvény bármelyik két szomszédos háromszöget és a közöttük futó körívet φ megfelelteti egy olyan tartománynak, amely a két félsíkból és az egyik elválasztó szakaszból (a $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumok valamelyikéből) áll.

A φ függvény az $\mathcal{U}$ univerzális fedőfelület *vetítése* az $\mathcal{R}$ Riemann-felületre.

Kis Picard-tétel

Tétel (kis Picard-tétel)

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor legfeljebb egy kivétellel minden komplex értéket felvesz.

Bizonyítás. Az $f(z)$ helyett vehetünk egy $A \cdot f(z) + B$ alakú függvényt is, ezért elég azt igazolni, hogy minden olyan f egészfüggvény, ami nem veszi fel a $0, 1$ értékeket, konstans.

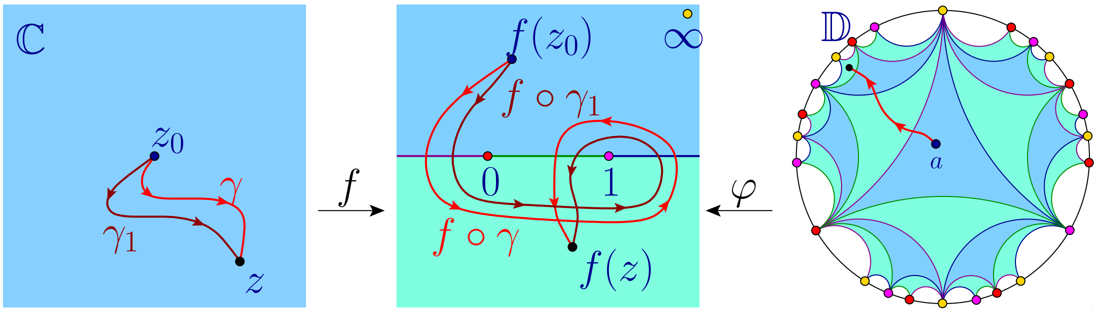
Vegyünk tehát egy tetszőleges holomorf $f : \mathbb{C} \to \mathcal{R}$ függvényt; azt fogjuk igazolni, hogy $f(z)$ konstans.

A bizonyításhoz konstruálni fogunk egy holomorf $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ függvényt azzal a tulajdonsággal, hogy $\varphi \circ F = f$.

Jelöljünk ki egy $z_0 \in \mathbb{C}$ pontot, és legyen $a \in \mathbb{D}$ olyan pont a körmodellben, amely az *$f(z_0)$ fölött* van, vagyis $\varphi(a) = f(z_0)$. Most bármely z pont esetén definiálni fogunk egy $F(z)$ pontot az egységkörben úgy, hogy $\varphi(F(z)) = f(z)$.

A $\mathbb{C}$ komplex síkon bármely két, z_0-t és z-t összekötő γ_1 és γ_2 görbe homotóp. Az f szerinti képük, $f \circ \gamma_1$ és $f \circ \gamma_2$ kezdő- és végpontja közös ($f(z_0)$ és $f(z)$), és homotópok $\mathcal{R}$-ben. Ezért az $\mathcal{U}$

fedőfelületben a $f \circ \gamma_1$ és $f \circ \gamma_2$ görbék a kezdőpontú felemeltjeinek a végpontja is megegyezik. A felemelt görbék végpontja mindig ugyanaz. Ezt a közös végpontot válasszuk $F(z)$-nek.



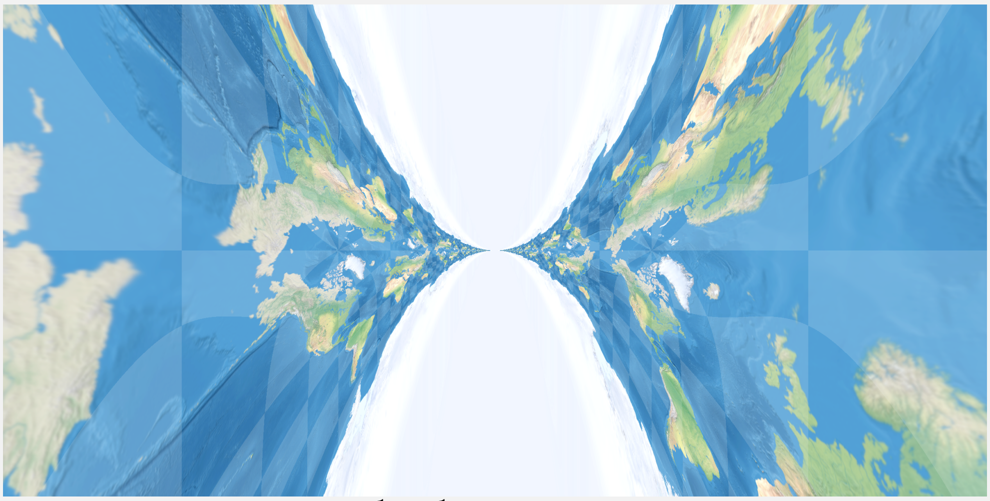
Az $F(z)$ függvény holomorf, mert $f(z)$ és φ lokális inverzeinek kompozíciója. Továbbá a φ visszavetíti a felememelt görbéket $\mathcal{R}$-be, tehát valóban $\varphi(F(z)) = f(z)$.

Az $F : \mathbb{C} \to \mathcal{U}$ egy korlátos egészfüggvény, tehát konstans. Akkor viszont $f = \varphi \circ F$ is konstans. Ezzel bebizonyítottuk a kis Picard-tételt.

Nagy Picard-tétel

Tétel (nagy Picard-tétel)

Ha $f(z)$-nek lényeges szingularitása van a c pontban, akkor a c bármely pontozott környezetében, legfeljebb 1 kivétellel, minden komplex értéket végtelen sokszor felvesz.



$\frac{1}{4} \sin \frac{1}{z}$ a 0 közelében

Bizonyítás. Legyen $\dot{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \backslash \{0\}$. Indirekt tegyük fel, hogy $f : \dot{\mathbb{D}} \to \mathcal{R}$ holomorf, és lényeges szingularitása van a 0-ban; ebből fogunk ellentmondásra jutni.

Ismét legyen $z_0 \in \dot{\mathbb{D}}$ olyan pont, hogy $f(z_0)$ a felső félsíkban van, és legyen $a \in \mathbb{D}$ olyan pont a körmodellben, amely az $f(z_0)$ fölött van, vagyis $\varphi(a) = f(z_0)$.

Próbálkozás. Tetszőleges $z \in \dot{\mathbb{D}}$ ponthoz megpróbálhatunk egy $F(z)$ pontot rendelni az $\mathcal{U}$ felületen. Kössük össze z_0-t z-vel valamilyen folytonos γ görbével. Az $f \circ \gamma$ görbe összeköti az $f(z_0)$ pontot $f(z)$-vel, és ezt a görbét *felemeljük* az egységkör csempézésébe. A felemelt görbe végpontja lenne $F(z)$.

A felemelt görbe végpontja γ homotópiaosztályától függ, ez pedig attól, hogy a γ görbe hányszor kerüli meg a 0-t. Emiatt nem feltétlenül kapunk szép, holomorf $F : \dot{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$ függvényt.

Ezen a nehézségen úgy segítünk, hogy az $\mathcal{U}$ felület helyett egy faktorfelületét fogjuk használni.

Azt kell megvizsgálnunk, hogy a kiinduló $\dot{\mathbb{D}}$ tartományban egy 0-t megkerülő görbe képe hogy viselkedik a $\mathcal{R}$ felületen. Tekintsük tehát egy 0 körüli, ω irányított körvonalat $\dot{\mathbb{D}}$-ban.

1. eset: *$f \circ \omega$ nullhomotóp $\mathcal{R}$-ben.*

Vegyünk egy tetszőleges $z \in \dot{\mathbb{D}}$ pontot, ehhez rendelünk egy – egyértelműen meghatározott – $F(z) \in \mathcal{U}$ pontot.

Bármely két, z_0-t és z-t $\dot{\mathbb{D}}$-ban összekötő γ_1 és γ_2 görbére $\gamma_2 = \gamma_1 \cdot \omega^k$ valamilyen k egész számmal, ezért $f \circ \gamma_1$ és $f \circ \gamma_2$ homotópok. Ezért a felemeltjeik végpontjai is egybeesnek, ezt a közös végpontot választjuk $F(z)$-nek. Ezzel tehát van egy $F : \dot{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$ holomorf függvényünk, ami a $\varphi \circ F = f$ függvényegyenletet is teljesíti.

Az $F(z)$ függvény a $\dot{\mathbb{D}}$ pontozott környezetet egy korlátos halmazba képezi, ezért a 0-ban megszüntethető szingularitása van.

(a) Ha az $F(0)$ érték az egységkör belsejében van, ahol a φ holomorf, akkor $f = \varphi \circ F$ is holomorf lenne a 0-ban, holott feltettük, hogy f-nbek lényeges szingularitása van a 0-ban.

(b) Ha $F(0)$ az egységkör határán van, az a maximum-elv miat csak úgy lehet, ha $F(z)$ konstans. De ez nem lehetséges, mert F felvesz értékeket az egységkör belsejében is.

2. eset: *$f \circ \gamma$ nem nullhomotóp $\mathcal{R}$-ben.*

Most is igaz, hogy bármely két, z_0-t és z-t $\dot{\mathbb{D}}$-ban összekötő γ_1 és γ_2 görbére $\gamma_2 = \gamma_1 \cdot \omega^k$ valamilyen k egész számmal, de $f \circ \gamma_1$ és $f \circ \gamma_2$ nem homotópok, ezért a felemeltjeik végpontjai nem esnek egybe.

Legyen T a csempézésnek a következő transzformációja: bármely $b \in \mathbb{D}$ pontra vegyünk egy olyan $z \in \dot{\mathbb{D}}$ pontot, amelyre $f(z) = \varphi(b)$. A z-n keresztül rajzoljunk egy pozitív irányítású ω_z körvonalat. Az $f \circ \omega_z$ körvonalat emeljük fel a csempézésbe b kezdőponttal; ennek végpontja legyen $T(b)$.

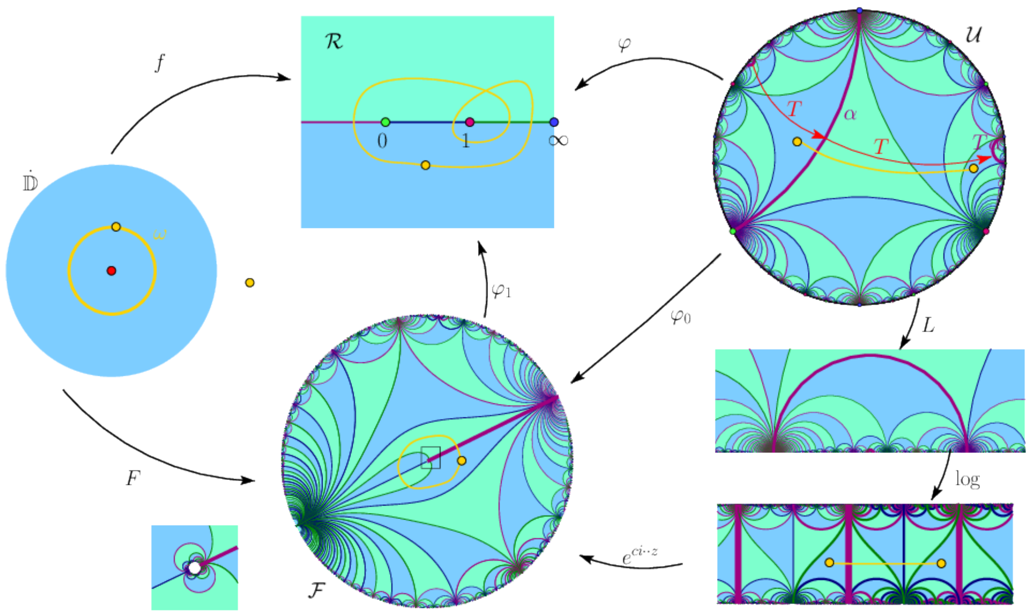
Meg fogjuk konstruálni a $\mathcal{R}$ felület egy $\mathcal{F}$ fedését, ami persze az $\mathcal{U}$ univerzális fedésnek egy faktora lesz. A T transzformáció a csempézésnek és vele együttt az egységkörlemeznek egy irányítástartó egybevágósága, egyértelműen meghatározza, hogy a csempézés egy határoló körívének mi a képe. Legyen α egy körív a csempézésben, a képe $T\alpha$.

2a. eset: *α és $T\alpha$ diszjunktak.*

Ez akkor fordul elő, amikor a T-t előállításához mindhárom színű szakaszra tükröznünk kell. Ilyenkor a T transzformációnak két fixpontja van az egységkör határán, ezek a $T^n(0)$ és $T^{-n}(0)$ sorozatok limeszei.

Egy $L(z)$ lineáris tört függvényel a csempézést a felső félsíkba (a félsíkmodellbe) képezzük úgy, hogy a két fixpont képe a 0 és a ∞ legyen. Az $L \circ T \circ L^{-1}$ transzformáció is lineáris tört, fixpontja a 0 és az ∞, tehát egy 0 középpontú nagyítás.

Ezután logaritmust veszünk, ezzel a félsíkmodell képe egy vízszintes sáv lesz, ebben az $\log \circ L \circ T \circ L^{-1} \circ \exp$ egy eltolás. Végül egy $e^{ci \cdot z}$ alakú függvénnyel egy 0 közepű $\mathcal{F}$ körgyűrűre képezzük a sávot. Ha a $c > 0$ konstanst jól választjuk, éppen a sáv egy periódusának feleltetjük meg a körgyűrűt, és az összes $T^n\alpha$ szakasz képe ugyanaz a görbe lesz a körgyűrűben.



Ezeknek a holomorf függvényeknek a kompozíciója legyen φ_0; ez tehát az $\mathcal{U}$ univerzális fedést az $\mathcal{F}$ fedő felületbe képezi, amely az $\mathcal{U}$-nak faktora, $\mathcal{R}$-nek fedése; legyen $\varphi_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ a $\mathcal{F}$ vetítése az $\mathcal{R}$-re, így tehát $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$.

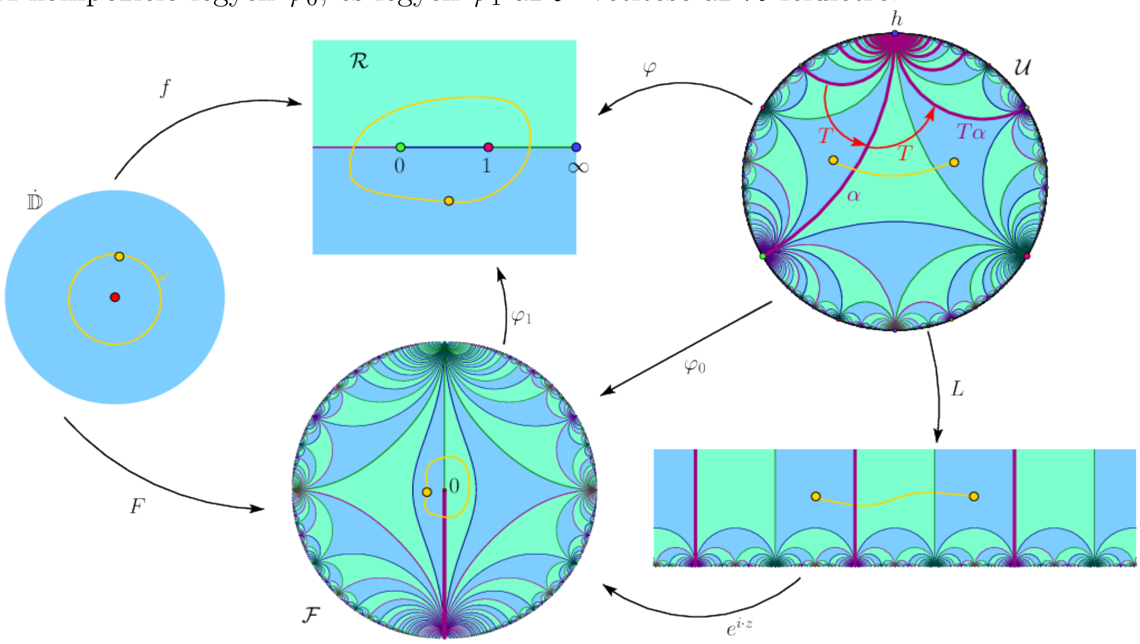
Most már felépíthetünk egy $F : \dot{\mathbb{D}} \to \mathcal{U}$ függvényt, amelyre teljesül, hogy $\varphi_1(F(z)) = f(z)$.

Bármely γ görbe, amely $\dot{\mathbb{D}}$-ben összeköti a z_0 pontot a z ponttal, felemelhető $\mathcal{U}$-ba, a lehetséges végpontokat a T valamelyik hatványa viszi egymásba. A felemelt görbét levetítjük az $\mathcal{F}$ faktorfelületbe, amelynek ezek után a végpontja már egyértelmű. Ez a közös végpont legyen $F(z)$.

Ismét csak az $F(z)$ függvény korlátos, ezért a 0-ban megszüntethető szingularitása van. Ha $F(0)$ az $\mathcal{F}$ belsejében van, akkor $f = \varphi_1 \circ F$ holomorf 0-ban, ez ellentmond annak, hogy f-nek lényeges szingularitása van. Ha pedig $F(0)$ a $\mathcal{U}$ körgyűrű határán van, az ellentmond a nyílt leképezés tételének.

2b. eset: *α és $T\alpha$ egyik végpontja közös, ez a pont mondjuk h.*

Képezzük egy L lineáris tört függvénnyel a csempézést a felső félsíkba úgy, hogy a h pont képe a ∞ legyen; ekkor tehát $T^n\alpha$ képei függőleges félegyenesek, a távolságuk legyen 2π. Ezután az e^{iz} függvénnyel a felső félsíkot a $\mathcal{F} = \dot{\mathbb{D}}$ lyukas egységkörbe képezzük, ami faktora $\mathcal{U}$-nak, $\mathcal{R}$-nek pedig fedése. A kompozíció legyen φ_0, és legyen φ_1 az $\mathcal{F}$ vetítése az $\mathcal{R}$ felületre.



Ezúttal is kapunk egy $F : \dot{\mathbb{D}} \to \mathcal{F}$ holomorf függvényt, ami teljesíti a $\varphi_1 \circ F = f$ függvényegyenletet. Az F korlátos, így megszüntethető szingularitása van a 0-ban.

(a) Ha $F(0)$ az $\mathcal{F}$ belsejében van, akkor $f = \varphi_1 \circ F$ holomorf a 0-ban, ellentmondás.

(b) Ha $|F(0)| = 1$, akkor ellentmondást kapunk a maximum-elvből.

(c) A legeslegutolsó eset, ha $F(0) = 0$, tehát az $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf függvény, amelynek a 0 – az egyetlen – gyöke. A $\mathcal{F}$ felületnek 0 egy határpontja, ez felel meg a h pontnak.

   A h pontban az $\mathcal{F}$ felületbebn véges sok háromoldalú tartomány (a csempék képei) találkozik. A véges sok háromszögre megszorítva φ_1-nek van véges vagy végtelen határértéke, a 0, az 1 vagy a ∞, attól függően, hogy ezek a csempeháromszögek melyik csúcsukkal vannak összeragasztva. Ezért az $f = \varphi_1 \circ F$ függvénynek is van határértéke a 0-ban, de ez ismét csak ellentmondás, mert a feltevés szerint $f(z)$-nek lényeges szingularitása van a 0-ban.

60. Folyadékáramlás síkban

Végszó

— Akarsz egy analízist hallani?
— Mi?... Ez megint olyan, mint az álomkór.
— Az analízis aprólékos elemzése valaminek, amit csak részleteiből érthetünk meg. Valaki nyomban a fivérem távozása után belépett Helena Aldingtonhoz. Ott találta Tom Leven kalapját, és leszúrta a nőt, tudva azt, hogy mindenki Tomot fogja gyanúsítani. Erről mi a véleményed?
— Szerintem az analízis olyan dolog, amit meg lehet fogni a gyilkos helyett, de nem lehet felakasztani. Hogy én is mondjak egy analízist: kinek állt érdekében elintézni a fivéredet, és megölni a nőt? Talán annak az embernek, aki a nő útján a fivéredtől ellopta a találmányt.
— Bravó! Ez nagyon jó analízis. Mindenesetre, ha tudnánk, hogy ki nyújtotta be azt a hasonló találmányt, talán közelebb járnánk az ügy megoldásához. Ha nem is ő ölte meg Helena Aldingtont, talán valaki, aki az ő személyével összefügg. Mi a véleményed?
— Hogy elég már az analízisen rágódni, menjünk inkább a büfébe.

(Rejtő: Elveszett cirkláló)