Valós analízis gyakorlat, 2006. október 2.

1. Igaz marad-e a Cantor axióma, ha végtelen intervallumokat is megengedünk?

2. Adott véges sok zárt intervallum úgy, hogy bármelyik kettőnek van közös pontja. Igazoljuk, hogy az összesnek van közös pontja.

Igaz marad-e az állítás, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?

3. Adott korlátos, zárt intervallumok egy tetszőleges számosságú rendszere úgy, hogy bármelyik kettőnek van közös pontja. Igazoljuk, hogy az összesnek van közös pontja.

Igaz marad-e az állítás, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?

Igaz marad-e az állítás, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok korlátosak?

4. Tekintsük a valós számsorozatokat. Két sorozatot tekintsünk ekvivalensnek, ha valahonnan kezdve megegyeznek. Definiáljuk a műveleteket és a rendezést is, koordinátánként. (Pl. az a_n sorozat kisebb, mint a b_n sorozat, ha $\exists k\ \forall n \geq k\ a_n < b_n$. Milyen testaxiómák (nem) teljesülnek?

5. Valamely H halmazon egy $\mathcal{F} \subset P(H)$ rendszert ultraszűrőnek nevezünk, ha a következő tulajdonságok mind teljesülnek:

a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

b) $\forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \subset H\ (A \subset B \implies B \in \mathcal{F})$;

c) $\forall A, B \in \mathcal{F}\ A \cap B \in \mathcal{F}$

d) $\forall A \subset H\ A \in \mathcal{F} \vee (H \setminus A) \in \mathcal{F}$.

Az $\mathcal{F}$-et főszűrőnek nevezzük, ha $\exists a \in H\ \mathcal{F} = \{A \subset H :\ a \in A\}$. Tudjuk, hogy minden végtelen halmazon létezik olyan ultraszűrő, ami nem főszűrő.

Legyen most $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}$ egy olyan ultraszűrő, ami nem főszűrő, és tekintsük ismét a valós szám sorozatokat, a műveleteket végezzük el koordinátánként.

a) Az a_n és b_n sorozatot tekintsünk ekvivalensnek, ha $\{n \in \mathbb{N} :\ a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$. Igazoljuk, hogy ez egy ,,kompatibilis osztályozás", vagyis ha valamilyen műveletben a sorozatokat más, ekvivalens sorozatokra cseréljük, akkor az új eredmény is ekvivalens lesz az eredetivel, és a kapott struktúra egy test.

b) Definiáljuk a rendezést; azt mondjuk, hogy az a_n sorozat kisebb, mint a b_n sorozat, ha $\{n \in \mathbb{N} :\ a_n < b_n\} \in \mathcal{F}$. Mutassuk meg, hogy a rendezési axiómák is teljesülnek.

c) Teljesül-e az így kapott rendezett testben a Cantor-axióma?

d) Teljesül-e az Arkhimédészi axióma?

Házi feladatok

6. Bizonyítsuk be az intervallumok összefüggőségéből Borel fedési tételét. (Ha egy korlátos zárt intervallumot lefed nyílt intervallumok egy rendszere, akkor véges sok is lefedi.)

7. Igazoljuk, hogy ha egy korlátos zárt intervallumot lefedünk akárhány nyílt halmazzal, azok közül véges sok is lefedi. (Az ilyen tulajdonságú halmazokat kompaktnak nevezzük; az állítás azt mondja, hogy minden korlátos zárt intervallum kompakt.)

Igaz marad-e az állítás, ha az intervallum nem zárt?

Igaz marad-e az állítás, ha az intervallum nem korlátos?