Valós analízis gyakorlat, 2006. október 16.

1. Alkalmazzuk a számtani-mértani közpeke közötti egyenlőtlenséget az $\sqrt{n}$, $\sqrt{n}$, 1, ..., 1 számokra. (Az 1-esek száma $n-2$.) Igazoljuk ennek felhasználásával is, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.

2. Tegyük fel, hogy $a_n \to a$, legyen $b_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ és $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Mutassuk meg, hogy $b_n \to a$ és $c_n \to a$.

3. Tegyük fel, hogy $a_n \to -\infty$, és legyen $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Mutassuk meg, hogy $b_n \to -\infty$.

4. Legyen $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Igazoljuk, hogy $x_n \to 2$.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a$, akkor $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a$.

6. Igaz-e, hogy ha $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a$, akkor $a_n \to a$?

7. Legyen $A > 0$, $x_1 = 1$ és $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}$. Igazoljuk, hogy $x_n \to \sqrt{A}$.

Mutassuk meg, hogy a helyes tizedesjegyek száma minden lépésben kb. megduplázódik.

8. Legyen $a > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_n \to b$, akkor $a^{x_n} \to a^b$.

9. Igazoljuk, hogy ha $a_n \to a$, akkor

$$a = \inf\{\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

10. Legyen $A > 0$, $k \geq 3$ egész, $x_1 = 1$ és $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}}{2}$. Milyen k esetén igaz, hogy $x_n \to \sqrt[k]{A}$?

11. Legyen $A > 0$, $k \geq 2$ egész, $x_1 = 1$ és $x_{n+1} = \dfrac{(k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}}{k}$. Igazoljuk, hogy $x_n \to \sqrt[k]{A}$.