Valós analízis gyakorlat, 2007. szeptember 13.

1. Bizonyítsuk be, hogy $s > 1$ esetén

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \prod_{p<N} \left(\sum_{k=0}^{M} \frac{1}{p^{ks}} \right) = \prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

2. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor önmagával vett Cauchy-szorzata divergens.

3. Igaz-e, hogy

(a) monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze monoton?

(b) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan monoton?

4. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\sqrt[n]{|x|} \qquad \frac{x^n}{n!} \qquad x^n - x^{n+1} \qquad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

5 (Dini tétele). Tegyük fel, hogy az $f_1, f_2, \ldots : H \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon, és tegyük fel, hogy $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ minden $x \in [a, b]$-re. Igazoljuk, hogy ha a függvénysorozat pontonként konvergál egy f folytonos függvényhez, akkor a konvergencia egyenletes.

Házi feladatok

6. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\frac{x^n}{1 + x^n} \qquad \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

7. Igaz-e, hogy

(a) konvex függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze konvex?

(b) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan konkáv?

8. Mutassunk példát olyan abszolút konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és feltételesen konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorokra, amelyek Cauchy-szorzata feltételesen konvergens.

9. Igaz marad-e Dini tétele nyílt intervallumon?