Valós analízis gyakorlat, 2007. szeptember 27.

1. Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara R.

(a) Keress felső becslést $|f'(x)|$-re.

(b) Mutasd meg, hogy a függvény bármely $d \in (c-R, c+R)$ pont körül is hatványsorba fejthető, és a d körüli hatványsor az $R - |d-c|$ sugarú intervallumban előállítja f-et.

2. Legyen f analitikus függvény az I intervallumon. Tetszőleges $c \in I$-re jelölje $R(c)$ a függvény c körüli hatványsorának konvergenciasugarát. Bizonyítsd be, hogy az $R(x)$ függvény Lipschitz.

3. Igazoljuk, hogy ha az

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-sor egyenletesen konvergens, akkor

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy nemnegatív tagú sor Cesaro-szummábilis, akkor konvergens.

Házi feladatok

5. Igazoljuk, hogy ha az

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-sor egyenletesen konvergens, akkor $\sum a_k^2$ és $\sum b_k^2$ is konvergens.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy nemnegatív tagú sor Abel-szummábilis, akkor konvergens.

7. Bizonyítsd be Tauber tételét: ha az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor konvergens $|x| < 1$ esetén, $\lim_{1-0} f = A$ és $n \cdot a_n \to 0$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.