Valós analízis gyakorlat, 2007. október 15.

1. Igazoljuk, hogy a vektorok vektoriális szorzása, mint $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ függvény folytonos.

2. Adjunk meg olyan zárt halmazon értelmezett folytonos és injektív függvényt, aminek az inverze nem folytonos.

3. Mik azok a differenciálható $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amikre $D_1 f \equiv D_2 f$?

4. Igazoljuk, hogy az $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ függvény az origóben minden irányban differenciálható. Létezik-e olyan a vektor, amire tetszőleges v egységvektor esetén $D_v f(0,0) = av$?

5. Igaz-e, hogy ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az origón kívül minden pontban differenciálható és az origóban minden irányban 0 az iránymenti deriváltja, akkor az origóban is differenciálható?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenciálható az a pontban, $f(a) = 0$ és $f'(a) = 0$, akkor minden korlátos $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényre gf is diffható a-ban.

7. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos és minden a-n átmenő egyenesre megszorítva f-nek lokális minimuma van az a pontban, akkor f-nek lokális minimuma van az a-ban?

Házi feladatok

8. Igazoljuk, hogy a kvaterniószorzás, mint $\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ függvény differenciálható.

9. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diffható és minden a-n átmenő egyenesre megszorítva f-nek lokális minimuma van az a pontban, akkor f-nek lokális minimuma van az a-ban?

10. Konstruáljunk olyan függvényt, aminek az origóban minden iránymenti deriváltja 0, és
(a) nem differenciálható az origóban;
(b) nem folytonos az origóban;
(c) nem korlátos az origó egyetlen környezetében sem.