Valós analízis gyakorlat, 2007. november 22.

1. Legyen $M \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető, $A \subset M$ és

$$f : A \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy

$$\underline{\int}_A f = b(A) \quad \text{és} \quad \overline{\int}_A f = k(A).$$

2. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető, $f : A \to [0, \infty)$ és $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+1} : x \in A,\ 0 \le y \le f(x)\}$.

(a) Igazoljuk, hogy

$$\overline{\int}_A f = k^{(p+1)}(B) \quad \text{és} \quad \underline{\int}_A f = b^{(p+1)}(B).$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor integrálható A-n, ha B mérhető $\mathbb{R}^{p+1}$-ben és ekkor

$$t^{(p+1)}(B) = \int_A f.$$

3. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető, $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrálható. Igazoljuk, hogy $f + g$ és fg is integrálható.

4. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető, $f : A \to [0, \infty)$. Igazoljuk, hogy $\overline{\int}_A f = 0$ akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra az (ε, ∞) halmaz ősképe nullmértékű.

5. Igaz-e, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető és $f : A \to [0, \infty)$ integrálható, akkor minden $\mathbb{R}$-beli Jordan-mérhető halmaz ősképe $\mathbb{R}^p$-ben Jordan-mérhető?

Házi feladatok

6. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető, $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrálható. Igazoljuk, hogy ha $\inf |g| > 0$, akkor f/g integrálható.

7. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető, $g : A \to \mathbb{R}$ integrálható és f folytonos $\operatorname{cl} g(A)$-n. Igazoljuk, hogy $f \circ g$ integrálható.

8. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető, $f : A \to \mathbb{R}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+1} : x \in A,\ 0 \le y \le f(x)\}$ és $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+1} : x \in A,\ f(x) \le y \le 0\}$. Fejezzük ki f alsó és felső integrálját a B és C halmazok belső és külső mértékével.

9. Bizonyítsuk be Steiner tételét: ha egy merev test tömege m és tehetetlenségi nyomatéka egy, a súlypontján átmenő tengely körül Θ_0, akkor egy vele párhuzamos, r távolságra levő tengely körül a tehetetlenségi nyomaték $\Theta_0 + mr^2$.