Valós analízis ZH, 2006. október 17.

1. Mutassunk példát olyan n_0 számra, amire igaz, hogy tetszőleges $n > n_0$ esetén

$$\frac{1}{n-5\sqrt{n}} > \frac{10n^2}{2^n-100}.$$

2. Definiáljuk az (a_n) sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Mutassuk meg, hogy a sorozat monoton.

3. Legfeljebb mekkora lehet a^3b^2c, ha a, b, c nemnegatív valós számok, és $a + b + c = 5$?

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges $c > 0$ racionális számra és pozitív egész n-re

$$1 + \frac{1}{2^{1+c}} + \frac{1}{3^{1+c}} + \ldots + \frac{1}{n^{1+c}} \leq 1 + \frac{1}{c} - \frac{1}{c \cdot n^c}.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots$ korlátos számsorozat, akkor

$$\sup\big\{ \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} : \ n \in \mathbb{N} \big\} \leq \inf\big\{ \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} : \ n \in \mathbb{N} \big\}.$$

6. Adott egy $(X, <)$ rendezett halmaz (egy tetszőleges halmaz, és elemei között egy $<$ kétváltozós reláció, ami trichotóm és tranzitív). Nevezzük *intervallumnak* az X következő alakú részhalmazait:

$$\begin{array}{lll}
(-\infty, a) = \{x \in X : \ x < a\}; & (a, b) = \{x \in X : \ a < x < b\}; & X; \\
(-\infty, a] = \{x \in X : \ x \leq a\}; & (a, b] = \{x \in X : \ a < x \leq b\}; & \emptyset; \\
(a, \infty) = \{x \in X : \ x > a\}; & [a, b) = \{x \in X : \ a \leq x < b\}; & \\
[a, \infty) = \{x \in X : \ x \geq a\}; & [a, b] = \{x \in X : \ a \leq x \leq b\}. &
\end{array}$$

Egy $K \subset X$ halmazt nevezzünk *konvexnek*, ha tetszőleges $a, b \in K$, $a < b$ esetén $[a, b] \subset K$. Tegyük fel, hogy X minden konvex részhalmaza intervallum. Mutassuk meg, hogy ha $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$ és $[a_n, b_n] \neq \emptyset$ minden n-re, akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

7. Adott egy $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kifejezés, ami az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ halmazokból a metszet, unió és különbség műveletekkel állít elő egy újabb halmazt. Igazoljuk, hogy f akkor és csak akkor írható fel kizárólag zárójelek és a különbség művelet segítségével, ha létezik olyan $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, amire tetszőleges $X_1, \ldots, X_n$ halmazok esetén $f(X_1, \ldots, X_n) \subset X_k$.

(Például az $X, Y \mapsto X \cap Y$ kifejezés felírható: $X \cap Y = X \setminus (X \setminus Y)$.)