Valós analízis gyakorlat, 2009. szeptember 21.

1. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\sqrt[n]{|x|} \qquad \frac{x^n}{n!} \qquad x^n - x^{n+1} \qquad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

2. Igaz-e, hogy
(a) monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze monoton?
(b) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan monoton?
(c) korlátos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze korlátos?
(d) folytonos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze folytonos?
(e) Lipschitz függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze Lipschitz?

3. Igaz-e, hogy
(a) monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze monoton?
(b) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan monoton?
(c) korlátos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze korlátos?
(d) folytonos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze folytonos?
(e) Lipschitz függvényekből álló sorozat egyenletes limesze Lipschitz?

4. Igaz marad-e Dini tétele nyílt intervallumon?

5. Az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat *egyenletesen korlátos*, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ |f_n(x)| < K$.
Igazoljuk, hogy egyenletesen korlátos függvénysorozat pontonkénti limesze korlátos.

6. Mutassunk példát olyan, folytonos $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvényekből álló függvénysorozatra, mi pontonként 0-hoz tart, de semmilyen részsorozata nem egyenletesen konvergens $[0,1]$ semmilyen nem elfajuló részintervallumán sem.

Házi feladatok

7. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\frac{x^n}{1+x^n} \qquad \sqrt[n]{1+x^{2n}} \qquad \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$$

8. Igaz-e, hogy
(a) konvex függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze konvex?
(b) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan konkáv?
(c) integrálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze integrálható?
(d) differenciálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze differenciálható?

9. Igaz-e, hogy
(a) konvex függvényekből álló sorozat egyenletes limesze konvex?
(b) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan konkáv?
(c) integrálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze integrálható?
(d) differenciálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze differenciálható?

10. Az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat *egyenletesen Lipschitz*, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x, y \in I\ |f_n(x) - f_n(y)| \le K|x-y|$.
Igazoljuk, hogy egyenletesen Lipschitz függvénysorozat pontonkénti limesze Lipschitz.

11. Igazoljuk, hogy ha az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat egyenletesen korlátos és egyenletesen Lipschitz az I korlátos zárt intervallumon, akkor létezik egyenletesen konvergens részsorozata.