Valós analízis gyakorlat, 2009. szeptember 28.

1. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ függvény akárhányszor differenciálható a $(0, \infty)$ intervallumban.

2. Írd fel a következő függvények Taylor-sorát.

(a) $\dfrac{1}{1-x}$ a 0 körül;

(b) $\dfrac{1}{x^2}$ a 3 körül;

(c) $\log x$ az 5 körül;

(d) $\sin x$ a $\dfrac{\pi}{3}$ körül;

(e) $\log(x^2 - 1)$ a 2 körül.

Mutass olyan intervallumot, amiben a Taylor-sor előállítja a függvényt.

3. Konstruálj olyan, akárhányszor differenciálható függvényt, aminek 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens, a $[-1, 1]$ intervallumban előállítja a függvényt, de máshol nem.

Házi feladatok

4. Írjuk fel a következő függvények Taylor-sorát.

(a) $\operatorname{ar\,sh} x^2$ a 0 körül;

(b) $\operatorname{ar\,cth} x$ a 2 körül.

Mutass olyan intervallumot, amiben a Taylor-sor előállítja a függvényt.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor minden átrendezettje egyenletesen konvergens a H halmazon, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ sor is egyenletesen konvergens.

6. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

ahol $\Lambda(n)$ a Mangoldt-szimbólum:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{ha } n = p^\alpha \\ 0 & \text{ha } p \text{ nem prímhatvány} \end{cases}$$

(Segítség: $\frac{f'}{f} = (\log f)'$)