Valós analízis gyakorlat, 2009. október 5.

1. Milyen valós c számokra igaz, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{c}{k} = 2^c?$$

2. Mutass példát olyan nem konstans analitikus $(0,1) \to \mathbb{R}$ függvényre, aminek végtelen sok gyöke van. Miért nem mond ez ellent az unicitás-tételnek?

3. Igazold, hogy ha egy függvény analitikus $\mathbb{R}$-en, akkor minden korlátos intervalllumban véges sok monoton szakaszra bomlik.

4. Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara R.

Mutasd meg, hogy a függvény bármely $d \in (c-R, c+R)$ pont körül is hatványsorba fejthető, és a d körüli hatványsor az $R - |d-c|$ sugarú intervallumban előállítja f-et.

5. A $\sum a_n$ sort *Abel-szummábilis*nak nevezzük, ha a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergens $(0,1)$-ben és van véges határértéke $1-0$-ban. Ezt a határértéket a sor *Abel-szummájának* nevezzük.

Igazoljuk, hogy ha egy sor konvergens, akkor Abel-szummábilis is, és az Abel-szummája egyenlő az összegével.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy nemnegatív tagú sor Abel-szummábilis, akkor konvergens.

7. Igazold, hogy ha egy sor Cesaro-szummábilis, akkor Abel-szummábilis is, és a Cesaro-szummája megegyezik az Abel-szummájával.

Házi feladatok

8. Legyen f analitikus függvény az I intervallumon. Tetszőleges $c \in I$-re jelölje $R(c)$ a függvény c körüli hatványsorának konvergenciasugarát. Bizonyítsd be, hogy az $R(x)$ függvény Lipschitz.

9. az f függvény analitikus $\mathbb{R}$-en, és minden n pozitív egészre $f(1/n^2) = \cos(1/n)$. Mi lehet $f(-1)$?

10. Igazold, hogy minden analitikus függvény megszámlálható sok konvex és konkáv szakaszból áll.

11. Bizonyítsd be Tauber tételét: ha az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor konvergens $|x| < 1$ esetén, $\lim\limits_{1-0} f = A$ és $n \cdot a_n \to 0$, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$.