Valós analízis gyakorlat, 2009. november 2.

1. Igazoljuk, hogy a vektorok vektoriális szorzása, mint $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, folytonos.

2. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ parciálisan differenciálható, és $D_1 f \equiv 0$, akkor f csak y-tól függ.

3. Határozzuk meg $x^3 + x^2 - xy$ minimumát és maximumát a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten.

4. Igazoljuk, hogy az $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja?

5. Mi a $\mathrm{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ függvény deriváltja?

6. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto x^y$ függvény $(y > 0)$ differenciálható. Mi a deriváltja?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenciálható az a pontban, $f(a) = 0$, és $f'(a) = 0$, akkor minden korlátos $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényre gf is differenciálható a-ban.

8. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos, és minden a-n átmenő egyenesre megszorítva f-nek lokális minimuma van az a pontban, akkor f-nek lokális minimuma van az a-ban?

Házi feladatok

9. Határozzuk meg $xy \cdot \log(x^2 + y^2)$ maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 \leq r$ körlemezen.

10. Igazoljuk, hogy az n-dimenziós vektorok skaláris szorzása, mint $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja?

11. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto x/y$ függvény differenciálható $(y \neq 0)$. Mi a deriváltja?

12. Igazoljuk, hogy az $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \ldots x_n$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja?

13. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható és minden a-n átmenő egyenesre megszorítva f-nek lokális minimuma van az a pontban, akkor f-nek lokális minimuma van az a-ban?