Valós analízis gyakorlat, 2009. november 9.

1. Milyen $\alpha, \beta > 0$ esetén lesz $|x|^\alpha \cdot |y|^\beta$ kétszer differenciálható az origóban?

2. Írjuk fel az xyz függvény második Taylor-polinomját az $(1, 2, 3)$ pontban.

3. Írjuk fel a $\sin(x + y)$ függvény harmadik Taylor-polinomját a $(0, 0)$ pontban.

4. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 5; \qquad x^3y^2(2 - x - y)$$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $D_{12}f$ és $D_{21}f$ is létezik az (a, b) pont egy környezetében és mindkettő folytonos (a, b)-ben, akkor $D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b)$.

6 (Schwarz tétele). Tegyük fel, hogy a D_1f, D_2f és $D_{12}f$ parciális deriváltak léteznek az (a, b) pont egy környezetében és $D_{12}f$ folytonos (a, b)-ben. Bizonyítsuk be, hogy $D_{21}f(a, b)$ is létezik és $D_{21}f(a, b) = D_{12}f(a, b)$.

Házi feladatok

7. Milyen $\alpha, \beta > 0$ esetén lesz $|x|^\alpha \cdot |y|^\beta$ háromszor differenciálható az origóban?

8. Írjuk fel az x/y függvény harmadik Taylor-polinomját az $(1, 2)$ pontban.

9. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$x^3 + y^3 - 9xy; \qquad \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

10. Legyen $f(x, y) = g(x)h(y)$, ahol a $g(x)$ és $h(y)$ függvények n-szer differenciálhatók az a, illetve a b pontban. A $g(x)$ n-edik Taylor polinomja az a pontban legyen $c_0 + c_1(x - a) + \ldots + c_n(x - a)^n$, a $h(y)$ n-edik Taylor polinomja a b pontban pedig $d_0 + d_1(y - b) + \ldots + d_n(y - b)^n$. Mi az f függvény (a, b)-beli, n-edik Taylor-polinomja?