Valós analízis gyakorlat, 2009. november 12.

1. Igazoljuk, hogy ha $f_1, ..., f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható konvex fügvények, akkor a $g(x_1, \ldots, x_p) = f_1(x_1) + \ldots + f_p(x_p)$ függvény is konvex. Ellenőrizzük, hogy a d^2g kvadratikus alak mindenhol pozitív szemidefinit.

2. Igazoljuk, hogy

$$\max_{1\le j\le p} \sqrt{\sum_{i=1}^{q} a_{ij}^2} \le \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \ldots & a_{qp} \end{pmatrix} \right\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2}.$$

Mutassunk példát olyan mátrixra, amikor nem áll egyenlőség.

3. (a) Igazoljuk, hogy minden $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés Lipschitz.
(b) Igazoljuk, ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható, akkor $\exists c > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^p\, |A(x)| > c|x|$.

4. Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^p$ konvex és nyílt, és $f : H \to \mathbb{R}$ konvex, akkor f folytonos.

Házi feladatok

5. Igazoljuk, hogy a kvaterniószorzás, mint $\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ függvény differenciálható.

6. Igazoljuk, hogy minden $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$-re $||A|| \ge |\det A|^{1/p}$.

7. Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^p$ konvex és nyílt, és $f : H \to \mathbb{R}$ konvex, akkor f a H minden kompakt részén Lipschitz.