Valós analízis gyakorlat, 2009. november 16.

1. Írjuk fel a következő leképezések Jacobi-mátrixát. Ellenőrizzük a láncszabályt.

$$f(x,y) = \big(x+y, xy, \cos(x+y)\big); \quad g(x,y) = \big(e^{x+y}, xy\big); \quad h = f \circ g.$$

2. Legyen $f, g : I \to (0,\infty)$ differenciálható függvények, ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Vezessük le a láncszabályból f^g differenciálási szabályát.

3. Vezessük le a láncszabályból az n-tényezős szorzat deriváltjára vonatkozó szabályt.

4. Mi az $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ leképezés (a komplex exponenciális függvény) lokális inverzének deriváltja?

5. Bizonyítsd be, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható és tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $D_1 f(x,y) = yD_2 f(x,y)$, akkor létezik olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amire $f(x,y) = g(e^x y)$.

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^p$ kétszer folytonosan differenciálható, $a \in H$, és tegyük fel, hogy $f'(a)$ invertálható. Tudjuk, hogy f-nek létezik inverze az a pont egy környenyezetében; legyen ez g. Igazoljuk, hogy g kétszer differenciálható $f(a)$ egy környezetében. Írjuk fel $g''\big(f(a)\big)$-t $f'(a)$ és $f''(a)$ segítségével.

Házi feladatok

7. Írjuk fel a következő leképezések Jacobi-mátrixát. Ellenőrizzük a láncszabályt.

$$f(x,y) = \big(\sin x, \cos y\big); \quad g(x,y) = \big(\log x, x^2 + y^2\big); \quad h = f \circ g.$$

8. Igazoljuk, hogy az $(x,y) \mapsto \log_x y$ függvény differenciálható. Vezessük le a láncszabályból $\log_{f(x)} g(x)$ differenciálási szabályát.

9. Mi az $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ leképezés (azaz a komplex négyzetre emelés) lokális inverzének Jacobi-mátrixa?

10. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre tetszőleges x, y esetén

$$y^2 \cdot D_1 f(x,y) = x^2 \cdot D_2 f(x,y).$$

Bizonyítsd be, hogy $f(x,y) = g(x^3 + y^3)$ egy alkalmas g függvénnyel. Igaz-e, hogy a g függvény differenciálható a 0-ban?

11. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^p$ n-szer folytonosan differenciálható, $a \in H$, és tegyük fel, hogy $f'(a)$ invertálható. Tudjuk, hogy f-nek létezik inverze az a pont egy környenyezetében; legyen ez g. Igazoljuk, hogy g is n-szer differenciálható $f(a)$ egy környezetében.