Valós analízis gyakorlat, 2009. november 23.

1. Határozzuk meg $x - y + 3z$ legnagyobb és legkisebb értékét az $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$ ellipszoidon.

2. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ feltételek mellett x, $x + y + z$,illetve $y + z$ legnagyobb lehetséges értékeit.

3. Határozd meg $x^2 + yz + z$ legkisebb és legnagyobb értékét az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ halmazon.

4. Legyen M szimmetrikus $n \times n$-es mátrix.

(a) Mely v egységvektorok esetén lesz $v^t M v$ minimális, illetve maximális?

(b) Melyik a leghosszabb, illetve a legrövidebb azon v vektorok közül, amikre $v^t M v = 1$?

5. Adottak a térben a $p_1, \ldots, p_n$ pontok. Tekintsük azt az origón átmenő síkot, amire a pontok és a sík távolságainak négyzetösszege minimális. Legyen a sík normálvektora v, ahol $|v| = 1$.

(a) Igazold, hogy v sajátvektora a $\sum_{i=1}^{n} p_i p_i^t$ mátrixnak.

(b) Mi a geometriai jelentése a v-hez tartozó sajátértéknek?

6. Adottak az n-dimenziós térben a $p_1, p_2, \ldots, p_N$ pontok, ezekre szeretnénk minél pontosabban gömböt illeszteni. Nem szeretnénk minden iterációs lépésben az összes ponttal újra meg újra számításokat végezni (mert nagyon sok pont van), ezért a következő módszereket találjuk ki.

1. módszer (algebrai LSQ): Megkeressük azt a $b \in \mathbb{R}^n$ vektort és c valós számot, amire

$$\sum_{i=1}^{N} \left(|p_i|^2 + \langle b, p_i \rangle + c\right)^2$$

minimális.

2. módszer (Pratt-féle ál-LSQ gömb): Megkeresük azt a $b \in \mathbb{R}^n$ vektort és a, c valós számokat, amikre

$$|b|^2 - 4ac = 1,$$

és ezen feltétel mellett

$$\sum_{i=1}^{\mathbb{N}} (a|p_i|^2 + \langle b, p_i \rangle + c)^2$$

minimális.

(a) Mutassuk meg, hogy az 1. módszer lineáris egyenletrendszerre vezet.
(b) Mutassuk meg, hogy a 2. módszer $(n+2)$-edfokú sajátvektor problémára vezet;
(c) Mondjunk heurisztikus indoklást arra, hogy miért pontosabb a 2. módszer.

Házi feladatok

7. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltételek mellett.

8. Ellenőrizzük a mértani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget a Lagrange-multiplikátor módszerrel.

9. Legyen A és B két $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrix, $\det A \neq 0$.

(a) Bizonyítsd be, hogy ha $x_0 \in \mathbb{R}^n$ feltételes lokális szélsőértékhelye az $x \to x^t B x$ függvénynek az $x^t A x = 1$ feltétel mellett, akkor x_0 sajátvektora az $A^{-1}B$ mátrixnak.

(b) Mi a jelentése az x_0 sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek?

10. Adott egy $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ akárhányszor differenciálható függvény. Az $F(x) = 0$ egyenletet *Newton-Raphson iterációval* akarjuk megoldani: veszünk egy $x_0 \in \mathbb{R}^p$ vektort, ami szerintünk közel van az egyik megoldáshoz, majd az $x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n)$ rekurzióval definiálunk újabb közelítő értékeket.

(a) Igazoljuk, hogy ha x_0 tényleg elég közel van az egyik megoldáshoz, akkor a sorozat konvergál ehhez a megoldáshoz, és a közelítés pontossága minden lépésben kb. megduplázódik.

(b) Igazoljuk, hogy ha f' mindenhol invertálható és $\sup ||f''|| \cdot \sup ||f'^{-1}||^2 < 2$, akkor a sorozat biztosan konvergens.