Valós analízis gyakorlat, 2009. november 26.

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $0 \leq a \leq b$ valós számokhoz létezik olyan $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz, amire $b(H) = a$ és $k(H) = b$.

2. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^p$ két diszjunkt, korlátos halmaz. Rakjuk sorba nagyság szerint a következő mennyiségeket:

$$k(A \cup B); \qquad b(A \cup B); \qquad k(A) + k(B); \qquad b(A) + b(B); \qquad k(A) + b(B); \qquad b(A) + k(B).$$

3. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz. Igazak-e a következő állítások?
(a) Ha $k(H) = 0$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(b) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\partial H \in \mathcal{J}$.
(c) Ha $\partial H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(d) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$.
(e) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$.
(f) Ha $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$ és $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha bármely $B \subset \mathbb{R}^p$ halmazra

$$k(B) = k(B \cap A) + k(B \setminus A).$$

5. Legyen $\mathcal{R} \subset P(\mathbb{R}^p)$ halmazgyűrű és $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Nevezzünk egy $A \in \mathcal{R}$ halmazt μ-mérhetőnek, ha bármely $B \in \mathcal{R}$ esetén $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Bizonyítsuk be, hogy a μ-mérhető halmazok $\mathcal{R}$-nek egy részgyűrűjét alkotják, és ezen a részgyűrűn μ additív, azaz tetszőleges A, B diszjunkt, μ-mérhető halmazokra $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Házi feladatok

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz. Igazak-e a következő állítások?
(a) Ha $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(b) Ha H zárt és $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$.
(c) Ha H nyílt és $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$.
(d) Ha $k(\operatorname{int} H) = b(\operatorname{cl} H)$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(e) $\partial H \in \mathcal{J}$.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset B \subset \mathbb{R}^p$ és B Jordan-mérhető, akkor

$$t(B) = k(A) + b(B \setminus A).$$

8. Bizonyítsuk be, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha bármely $B \subset \mathbb{R}^p$ halmazra

$$b(B) = b(B \cap A) + b(B \setminus A).$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ korlátos, zárt halmazok és $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ nullmértékű, akkor $k(F_n) \to 0$.