Valós analízis gyakorlat, 2009. december 3.

1. Cseréljük fel (helyesen :-)) az integrálások sorrendjét!

$$\int_0^1 \int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x; \qquad \int_{-1}^1 \int_{|x|}^{x^2+x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

2.

$$\int_0^1 \int_0^x y^2 e^x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = ?$$

3. Mutass példát olyan függvényre, amely integrálható valamely pozitív mértékű A-n, de a szakadási pontjai halmazának külső mértéke egyenlő A mértékével.

4. Legyen f korlátos és nemnegatív a mérhető A halmazon. Bizonyítsuk be, hogy ha $\int_A f = 0$, akkor $k(\{x \in A : f(x) \geq a\}) = 0$ minden $a > 0$-ra. Igaz-e a fordított állítás?

5. Igaz-e, hogy ha egy $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény minden vízszintes és függőleges szakaszon monoton, akkor integrálható?

Házi feladatok

6.

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \right) dy = ? \qquad \int_0^1 \left(\int_{y^{2/3}}^1 y \cos x^2\,dx \right) dy = ?$$

7. Bizonyítsuk be Steiner tételét: ha egy merev test tömege m és tehetetlenségi nyomatéka egy, a súlypontján átmenő tengely körül Θ_0, akkor egy vele párhuzamos, r távolságra levő tengely körül a tehetetlenségi nyomaték $\Theta_0 + mr^2$.

8. Biznyítsuk be, hogy ha $f > 0$ és integrálható az A halmazon, akkor $\int_A f\,dx > 0$.

9. Igazoljuk, hogy ha A mérhető és pozitív mértékű, és f integrálható A-n, akkor f legalább egy pontban folytonos.