Valós analízis gyakorlat, 2009. december 10.

1. Egy háromszög három csúcsa $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, m)$. Legyen tetszőleges $(x, y) \in [0, 1]^2$-re

$$f(x, y) = (1 - x)(1 - y) \cdot A + x(1 - y) \cdot B + y \cdot C.$$

Számítsuk ki a háromszög területét a mértéktranszformációval.

2. Számítsuk ki a $\beta - 90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ - \gamma$, $0 \leq r \leq \dfrac{m}{\cos\varphi}$ halmaz területét.

3.

$$\int_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = ?$$

Házi feladatok

4. Számítsd ki az $x^2 + y^2 \leq 1$, $|z| \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ halmaz Jordan-mértékét.

5. Mekkora egy m tömegű, r sugarú, $2h$ magasságú, homogén tömegeloszlású henger tehetetlenségi nyomatéka egy, a középpontján átmenő, a geometriai tengelyére merőleges forgástengely körül?

6. Egy számítógépes kísérlethez független, normális eloszlású (ál)véletlen számokra van szükségünk. A rendelkezésünkre álló véletlenszám-generátor $(0, 1)$-beli, egyenletes eloszlású, független véletlenszámokat biztosít. Hogyan készíthetünk ezekből normális eloszlású sorozatot?

(A normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\varrho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.)

7. Legyen tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cos(ax)\, \mathrm{d}x.$$

(a) Igazoljuk, hogy $I(a) \cdot I(b) = I\big(\sqrt{a^2 + b^2}\big)$.
(b) $I(a) = ?$