Valós analízis ZH, 2009. december 7. $14^{15} - 15^{45}$

Matematika BSC, 2. évfolyam, matematikus szakirány

Mindegyik lapra írjátok rá a neveteket.

Olvashatóan írjatok.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható.

Az osztályzat az elért pontok száma, kerekítve.

Az íróeszközökön kívül más segédeszköz nem használható. (Mobiltelefon, számológép, szögmérő és szuahéli szótár sem.)

Az előadáson és a gyakorlaton szerepelt állítások bizonyítás nélkül felhasználhatók, ha pontosan idézitek. (Pl. „Volt előadáson, hogy...")

1. Differenciálható-e az

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}{x^2+y^2+z^2} & \text{ha } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 1 & \text{ha } x=y=z=0 \end{cases}$$

függvény az origóban?

2.

$$\int_0^{\pi} \left(\int_{\sqrt{\pi x}}^{\pi} \left(\sin \frac{y^3}{\pi^2} \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = ?$$

3. Az $u(x,y,z)$ és $v(x,y,z)$ függvények folytonosak az origó egy környezetében,

$$\sin u + \operatorname{sh} v = x + y + z,$$

$$\operatorname{th} u + 2^{v+y} = x^2 + 2z + 1,$$

$$u(0,0,0) = v((0,0,0) = 0.$$

Igazold, hogy u és v differenciálható az origó egy környezetében, és számítsd ki u és v deriváltját az origóban.

4. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre tetszőleges x, y esetén

$$x \cdot D_1 f(x,y) = y \cdot D_2 f(x,y).$$

Bizonyítsd be, hogy $f(x,y) = g(xy)$ egy alkalmas differenciálható $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel.

5. Számítsd ki az $(5,-2)$ pont és az $x = y^2$ parabola távolságát a Lagrange-multiplikátor módszerrel.

6. Bizonyítsd be, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^p$ korlátos és $r > 0$, akkor $U(K,r) = \bigcup_{a \in K} B(a,r)$ Jordan-mérhető.

7. Legyen K nem üres, kompakt halmaz egy metrikus térben, és tegyük fel, hogy az $f : K \to K$ leképezésre tetszőleges $x, y \in K$, $x \neq y$ esetén $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x,y)$. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan x_0 pont, amire $f(x_0) = x_0$.