Valós analízis gyakorlat, 2010. február 9.

1. Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrálokat.

$$\int_0^3 x^2 \,\mathrm{d}[x] \qquad \int_0^3 [x] \,\mathrm{d}\{x\} \qquad \int_0^3 [x+0.5] \,\mathrm{d}\{x\} \qquad \int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}(\sin x)$$

2. Legyen $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Korlátos változású-e a függvény? Abszolút folytonos-e?

3. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

(a) Ha f korlátos változású, akkor f folytonos.
(b) Ha f korlátos változású, akkor f Riemann-integrálható.
(c) Ha f Lipschitz, akkor f korlátos változású.
(d) Ha f Lipschitz, akkor f abszolút folytonos.
(e) Ha f abszolút folytonos, akkor f egyenletesen folytonos.
(f) Ha f abszolút folytonos, akkor a $\int_a^b \mathrm{d}f$ Stieltjes-integrál létezik.
(g) Ha f folytonos és korlátos változású, akkor f abszolút folytonos.

4. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív valós számok egy olyan sorozata, amire

$$\exists c > 0 \quad \forall x > 2 \quad \big|\{k : \ a_k < x\}\big| > c\frac{x}{\log x}.$$

(Ilyenek például a prímszámok.) Bizonyítsuk be, hogy $\sum \frac{1}{a_k} = \infty$.

5. A síkon az origó közepű, $R \geq 1$ sugarú körbe eső rácspontok száma $R^2\pi + O(R^\vartheta)$, ahol $\vartheta \leq 1$. ($\vartheta = 1$ triviális; $\vartheta = 2/3$ elemi; $\vartheta = 131/208 \approx 0.62981$ ismert; $\vartheta = 1/2$-re nem igaz.)

Ennek felhasználásával becsüljük meg a körbe eső, origótól különböző rácspontok origótól mért távolságának szorzatát.

6. Legyen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ Stieltjes-integrál létezik. Igazoljuk, hogy ha f és g folytonos a $c \in (a,b)$ pontban, akkor a $h(x) = \int_a^x f \ \mathrm{d}g$ függvény is folytonos c-ben.

7. Hogyan definiálhatnánk az $\int_a^b f \cdot |\,\mathrm{d}g|$ integrált? Mondjunk elégséges feltételeket a létezésére!

8. Terjesszük ki a Stieltjes-integrált improprius értelemben. Legyen $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $\int_a^b f \ \mathrm{d}g$ Stieltjes integrál létezik tetszőleges $[a,b] \subset (\alpha, \beta)$ intervallumban. Legyen

$$\int_\alpha^\beta f \,\mathrm{d}g = \lim_{a \to \alpha+} \lim_{b \to \beta-} \int_a^b f \ \mathrm{d}g.$$

Igazoljuk, hogy ha $\int_\alpha^\beta |f| \cdot |\,\mathrm{d}g|$ véges, akkor $\int_\alpha^\beta f \ \mathrm{d}g$ konvergens.

Házi feladatok

9. (a) Számítsd ki a következő Stieltjes-integrálokat.

$$\int_0^3 x^2 \,\mathrm{d}\Big[\sqrt{x}\Big] \qquad \int_0^\pi x \,\mathrm{d}(\sin x)$$

(b) Számítsd ki ugyanezeket az integrálokat parciális integrálással is.

10. Legyen $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin \log x$. Korlátos változású-e a függvény? Abszolút folytonos-e?

11. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

(a) Ha f monoton, akkor f korlátos változású.
(b) Ha f folytonos, akkor f korlátos változású.
(c) Ha f folytonos és korlátos változású, akkor f Lipschitz.
(d) Ha f korlátos változású, akkor az $[a,b]$ intervallum felbontható megszámlálható sok olyan intervallumra, amelyeken f monoton.
(e) Ha a $\int_a^b \mathrm{d}f$ Stieltjes-integrál létezik, akkor f abszolút folytonos.
(f) Ha f abszolút folytonos, akkor f Riemann-integrálható.

12. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív valós számok egy olyan sorozata, amire

$$\exists c > 0 \quad \forall x > 2 \quad \big|\{k : \ a_k < x\}\big| < c\frac{x}{\log^2 x}.$$

(Ilyenek például az ikerprímek.) Bizonyítsd be, hogy $\sum \frac{1}{a_k}$ konvergens.