Valós analízis gyakorlat, 2010. március 9.

1. Miért nem külső mérték a külső Jordan-mérték a korlátos halmazok gyűrűjén?

2. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra adjunk meg olyan sűrű nyílt $G \subset \mathbb{R}$ halmazt, amire $\overline{\lambda}(G) < \varepsilon$.

3. Legyen X nem megszámlálható halmaz, $\mathcal{M}$ pedig az X véges részhalmazai által generált σ-algebra.

a) Jellemezzük $\mathcal{M}$ halmazait!

b) Konstruáljunk olyan α valószínűségi mértéket $\mathcal{M}$-en, mely szerint a véges halmazok 0 mértékűek!

c) Határozzuk meg az α által generált ϕ_α külső mértéket!

d) Mi a ϕ_α által meghatározott mérték és mely halmazok mérhetőek?

4. Létezik-e olyan $H \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre bármely $a < b$ esetén $0 < \overline{\lambda}((a,b) \cap H) < \dfrac{99}{100}(b-a)$?

5. Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli halmaz (a) minden Borel-halmazt; (b) minden G_δ halmazt; (c) minden F_σ halmazt; (d) minden nyílt halmazt; (e) minden zárt halmazt; (f) minden intervallumot; (g) minden egységnyi hosszúságú intervallumot jól vág ketté a külső Lebesgue-mérték szerint, akkor Lebesgue-mérhető?

6. Konstruálj olyan $H \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazt, amelyre tetszőleges $a < b$ esetén $\lambda((a,b) \cap H) > 0$ és $\lambda((a,b) \setminus H) > 0$.

Házi feladatok

7. a) Igazoljuk, hogy megszámlálható sok sűrű G_δ halmaz metszete sűrű G_δ.

b) Igazoljuk, hogy Q nem G_δ.

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre f folytonossági pontjainak halmaza G_δ.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $A_n \subset \mathbb{R}^d$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}(A_n) < \infty$, akkor azon pontok halmaza, amelyek végtelen sok A_n-nek elemei, nullmértékű. (Borel-Cantelli lemma)

10. Bizonyítsuk be Lebesgue integrál nélkül, hogy ha $f_n : [0,1] \to [0,1]$ folytonos és $f_n(x) \to 0$ minden $x \in [0,1]$-re, akkor $\int_0^1 f_n(x)dx \to 0$!

11. a) Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\lambda(H) > 0$, akkor $H - H$ tartalmaz 0 körüli gömböt. (Steinhaus tétele)

b) Igazoljuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mérhető pozitív mértékű halmazok, akkor $A + B$ belseje nem-üres.

c) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ pozitív mértékű mérhető és $B \subset \mathbb{R}^p$ pozitív külső mértékű halmaz, akkor $A + B$ belseje nem-üres.