Valós analízis gyakorlat, 2010. május 4.

1. Igazoljuk, hogy ha a sűrűségi pont definíciójában a gömböt kockára cseréljük, akkor ekvivalens definíciót kapunk.

2. Igazoljuk, hogy ha egy folytonos függvény baloldali felső deriváltja mindenhol nemnegatív, akkor monoton nő.

3. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Ellenőrizzük, hogy $\int_0^1 \left(\int_0^1 f\,dx\right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f\,dy\right) dx$. Azt is ellenőrizzük, hogy f nem Lebesgue-integrálható a $[0,1]^2$ négyzeten.

4. Tegyük fel, hogy igaz a kontinuumhipotézis, és $\prec$ a $[0,1]$ intervallum egy ω_1 típusú jólrendezése. Legyen $f(x,y)=1$ ha $x \prec y$, egyébként $f=0$.

(a) Igazoljuk, hogy hogy $\int_0^1 \left(\int_0^1 f\,dx\right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f\,dy\right) dx$.

(b) Mutassuk meg, hogy az $\{(x,y) \in [0,1]^2 : x \prec y\}$ halmaz nem Lebesgue-mérhető.

5. Legyen $(X,\mathcal{M},\mu)$ és $(Y,\mathcal{N},\nu)$ két mértéktér. Tegyük fel, hogy a $H \subset X \times Y$ halmaz benne van az $\mathcal{M}(\times)\mathcal{N} = \{A \times B : A \in \mathcal{M}, B \in N\}$ félgyűrű által generált σ-algebrában. Igazoljuk, hogy H minden vízszintes szelete benne van $\mathcal{M}$-ben, és minden függőleges szelete benne van $\mathcal{N}$-ben.

6. (a) Egy $\mathbb{R}^n$-beli halmaznak minden pontjában pozitív az alsó belső sűrűsége. Igazoljuk, hogy a halmaz Lebesgue-mérhető.

(b) Igazoljuk ennek felhasználásával, hogy (nem elfajuló) zárt gömbök uniója Lebesgue-mérhető.

Házi feladatok

7. Igazoljuk, hogy ha a Lebesgue-pont definíciójában a gömböt kockára cseréljük, akkor ekvivalens definíciót kapunk.

8. Legyen $g(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$. Ellenőrizzük, hogy $\int_0^1 \left(\int_0^1 g\,dx\right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 g\,dy\right) dx$. Azt is ellenőrizzük, hogy g nem Lebesgue-integrálható a $[0,1]^2$ négyzeten.

9. Igaz-e, hogy ha egy függvény baloldali felső deriváltja mindenhol nemnegatív, akkor monoton nő?

10. Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}^n$-beli halmaz előáll nem üres belsejű konvex halmazok uniójaként, akkor Lebesgue-mérhető.

11. Ismert, hogy a kontinuum kofinalitása nem lehet ω. Legyen $\prec$ a $[0,1]$ intervallum egy kontinuum típusú jólrendezése. Legyen minden $H \subset [0,1]$-re $\mu(H)=0$, ha $|H| < 2^{\aleph_0}$ (azaz H kicsi), és $\mu(H)=1$, ha $\big|[0,1] \setminus H\big| < 2^{\aleph_0}$ (azaz H nagyon nagy). Legyen továbbá $f(x,y)=1$ ha $x \prec y$, egyébként $f=0$.

(a) Igazoljuk, hogy μ mérték.

(b) Igazoljuk, hogy hogy $\int_0^1 \left(\int_0^1 f\,d\mu(x)\right) d\mu(y) \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f\,d\mu(y)\right) d\mu(x)$.