Valós analízis ZH, 2010. máus 11.

Matematika BSC, 2. évfolyam, matematikus szakirány

Mindegyik lapra írjátok rá a neveteket.

Olvashatóan (nem túl kicsi betűkkel) írjatok.

Az előadáson és a gyakorlaton szerepelt állítások bizonyítás nélkül felhasználhatók, ha pontosan idézitek. (Pl. „Volt előadáson, hogy...")

Az íróeszközökön kívül más segédeszköz nem hasznáható.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható.

Az osztályzat az elért pontok száma, kerekítve.

1. Legyenek A és B mérhető halmazok az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ véges mértéktérben és legyen

$$\vartheta(H) = \mu(H \cap A) - \mu(H \cap B)$$

minden $H \in \mathcal{M}$-re. Bizonyítsuk be, hogy $\vartheta \ll \mu$, és határozzuk meg a Radon-Nikodym deriváltját!

2. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető, és $\overline{d}_A(x)$ az A halmaz Lebesgue-mérték szerinti felső sűrűsége az x pontban. $\int_{\mathbb{R}^n} \overline{d}_A \, \mathrm{d}\lambda = ?$

3. Igazoljuk, hogy ha az $f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénysorozat a g függvényhez tart L_∞-ben, akkor $f_n \to g$ pontonként m.m.

4. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrálható, akkor $\liminf f < \infty$ m.m.

5. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$V\big(f; [a, b]\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \big|f^{-1}(\{x\})\big| \, \mathrm{d}x.$$

6. Létezik-e $[0, 1]$-en megszámlálhatónál több, páronként szinguláris folytonos mérték?

7. Legyen $\mathcal{F}$ az $L_2([0, 1])$ tér egységgömbje, azaz

$$\mathcal{F} = \big\{f \in L_2([0, 1]) : ||f||_2 = 1\big\}.$$

Igaz-e, hogy $\mathcal{F}$ minden nem megszámlálható részhalmazában vannak olyan különböző f, g függvények, amelyekre

$$\Big|\int_{[0,1]} fg \, \mathrm{d}\lambda\Big| > \frac{9}{10}\,?$$