Mat. BSC, matematikus szakirány, geometria gyakorlat
2008. február 21.

1. Legyenek e, f és g páronként kitérő egyenesek a 4-dimenziós projektív térben, melyek nincsenek benne egy hipersíkban. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan egyenes van, mely mindhármukat metszi.

2. Legyenek O, X, Y, I egy egyenes pontjai az $\mathbb{F}$ ferdetest feletti projektív térben, melyek az következő módon reprezentálhatók nullától különböző vektorokkal: $O = [\mathbf{a}]$, $X = [\mathbf{a} + x\mathbf{b}]$, $Y = [\mathbf{a} + y\mathbf{b}]$, $I = [\mathbf{b}]$, ahol $x, y \in \mathbb{F}$. Vegyünk fel egy I-re illeszkedő egyenesen két I-től és egymástól különböző A és B pontot, majd szerkesszük meg a $C = AX \cap BO$, $D = CI \cap BY$, $Z = AD \cap OI$ pontokat. Bizonyítsuk be, hogy $Z = [\mathbf{a} + (x + y)\mathbf{b}]$.

3. Adott egy téglalap alakú papíron egy P pont és két szakasz, melyek meghosszabbításai egy olyan Q pontban metszik egymást, mely nincs a papíron. Hogyan szerkeszthető meg csak vonalzóval a PQ egyenesnek a lapra eső része, ha a papírlapon kívülre nem szabad rajzolnunk?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az $A_0A_1A_2A_3$ és $B_0B_1B_2B_3$ tetraéderek perspektívek egy P pontra nézve, akkor az egymásnak megfelelő élegyenesek $A_iA_j \cap B_iB_j = P_{ij}$, $0 \leq i < j \leq 3$, metszéspontjai egysíkúak.

5. Írjuk le az $\mathbb{F}_2$ test feletti projektív tér pontjainak, egyeneseinek és síkjainak halmazát.

6. A Desargues-konfiguráció 10 pontból és 10 egyenesből áll, minden ponton át 3 egyenes megy és minden egyenesen három pont van. (A pontok a két perspektív háromszög csúcsai, a megfelelő oldalak metszéspontjai és a perspektivitás középpontja, az egyenesek a háromszögek oldalai, a megfelelő csúcsok összekötő egyenesei és a perspektivitás tengelye.) Nevezzük a konfiguráció egy automorfizmusának a 10 pont egy olyan permutációját, mely kollineáris hármasokat kollineáris hármasokba visz. Bizonyítsuk be, hogy a konfiguráció automorfiznuscsoportja tranzitívan hat a csúcsokon. Hány automorfizmus van összesen?

Házi feladatok

7. Adott egy P pont és két párhuzamos egyenes, e és f. Hogyan lehet csak vonalzóval megszerkeszteni a P-n átmenő, e-vel és f-fel párhuzamos egyenest?

8. Legyenek O, U, X, Y, I egy egyenes pontjai az $\mathbb{F}$ ferdetest feletti projektív térben, melyek az következő módon reprezentálhatók nullától különböző vektorokkal: $O = [\mathbf{a}]$, $U = [\mathbf{a} + \mathbf{b}]$, $X = [\mathbf{a} + x\mathbf{b}]$, $Y = [\mathbf{a} + y\mathbf{b}]$, $I = [\mathbf{b}]$, ahol $x, y \in \mathbb{F}$. Vegyünk fel egy X-re illeszkedő egyenesen két X-től és egymástól különböző A és B pontot, majd szerkesszük meg a $C = AO \cap BU$, $D = CY \cap BI$, $Z = AD \cap OI$ pontokat. Bizonyítsuk be, hogy $Z = [\mathbf{a} + (xy)\mathbf{b}]$.

9. Szeretnénk két pontot egy egyenessel összekötni, de csak egy olyan vonalzónk van, mely rövidebb a két pont távolságánál. Hogyan járjunk el?

10. Bizonyítsuk be, hogy a 9 pontból és 9 egyenesből álló Papposz-konfiguráció automorfizmuscsoportja tranzitívan hat a csúcsokon. Határozzuk meg az automorfizmuscsoport elemszámát.