Mat. BSC, matematikus szakirány, geometria gyakorlat
2008. február 28. 12:10 – 13:40

1. Fogalmazzuk meg a Desargues-tétel duálisát a síkban és a térben, a Papposz-tétel duálisát a síkban.

2. Mutassuk meg, hogy ha egy $(X, \mathcal{S} = \mathcal{S}_1)$ véges projektív síkon egy $e \in \mathcal{S}$ egyenesnek $q+1$ pontja van, akkor minden egyenesnek $q+1$ pontja van, és minden pontra pontosan $q+1$ egyenes illeszkedik. Bizonyítsuk be, hogy ekkor X-nek $1+q+q^2$ pontja van, $\mathcal{S}$ pedig $1+q+q^2$ egyenesből áll.

3. Mutassuk meg, hogy az $(X, \mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ rendszer pontosan akkor projektív sík, ha $\mathcal{S}_{-1} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{S}_0 = \{\{P\} \mid P \in X\}$, $\mathcal{S}_2 = \{X\}$ és az egyenesek $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ rendszerére teljesül az alábbi két állítás:

(a) Bármely két különböző $P, Q \in X$ ponthoz létezik egyértelműen egy $e \in \mathcal{S}$ egyenes, melyre $P, Q \in e$.

(b) Bármely két különböző $p, q \in \mathcal{S}$ egyeneshez létezik egyértelműen egy $E \in X$ pont, melyre $p \ni E$, $q \ni E$.

(c) Létezik négy pont X-ben, melyek közül semelyik három sincs egy egyenesen.

4. Írjuk le azokat az $(X, \mathcal{S})$ párokat, melyekre X egy halmaz, $\mathcal{S}$ az X hatványhalmazának egy része, melynek elemeit egyeneseknek nevezzük, s melyre teljesülnek az 1. feladat (a) (b) állításai, de nem teljesül a (c) állítás.

5. Legyenek $A_0, A_1, \ldots, A_{20}$ egy szabályos 21-szög egymást követő csúcsai. Jelölje X a csúcspontok halmazát és nevezzünk egy $L \subset X$ részhalmazt „egyenesnek”, ha az A_0, A_3, A_4, A_9, A_{11} csúcshalmaz egy elforgatottja. Bizonyítsuk be, hogy X és az egyenesek $\mathcal{S}$ rendszere egy projektív síkot ad.

6. Mutassuk meg, hogy az előző példában szereplő projektív sík izomorf az $\mathbb{F}_4$ test feletti projektív síkkal.

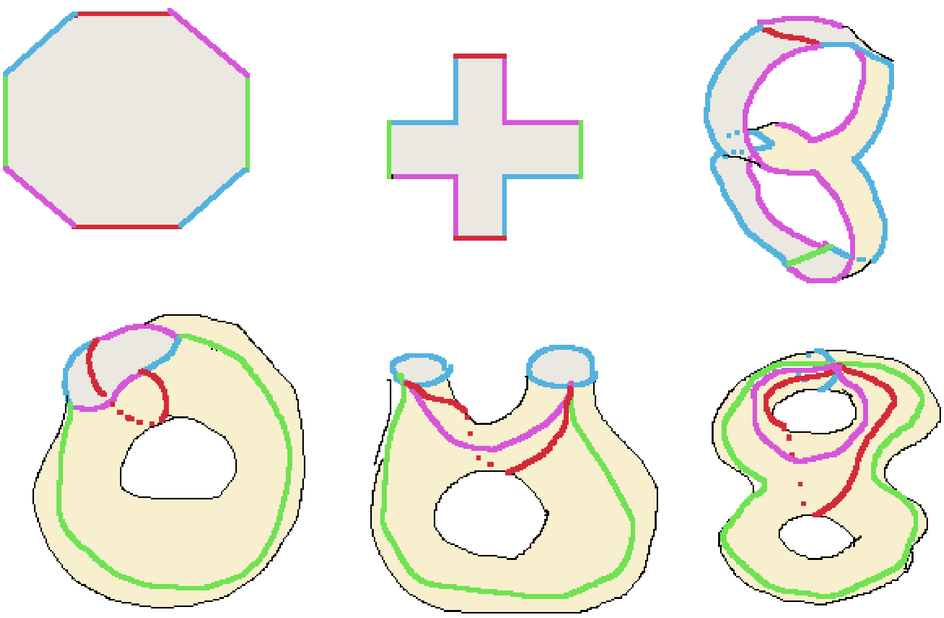
7. Legyen V egy véges dimenziós vektortér az $\mathbb{F}$ test felett, V^* a duális tere. Adjunk meg egy izomorfizmust a $P(V^*)$ és a $P(V)^*$ projektív terek között.

Házi feladatok

8. Mutassuk meg, hogy az 1. feladat (c) állítása helyettesíthető azzal, hogy minden egyenesnek van legalább három pontja és az X sík nem egyenes ($X \notin \mathcal{S}$),

9. Hány k dimenziós altere van egy n-dimenziós véges projektív térnek, ha egy egyenesének $q+1$ pontja van?

10. Bizonyítsuk be, hogy a Papposz-tétel még akkor sem következik az n-dimenziós projektív tér illeszkedési axiómáiból, ha a Desargues-tételt is hozzávesszük az axiómákhoz. Mutassuk meg, hogy a Papposz-tételnek az a speciális esete, amikor a ponthármasok perspektív helyzetben vannak, (azaz ha AA', BB' CC' kollineáris), következik a Desargues-tételből.



http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/geo-2008-1