Komplex függvénytan gyakorlat, 2006. szeptember 11.

1. Hova képezi a $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ (Zsukovszkij-leképezés)
(a) Az egységkörvonalat? (b) az egységkörvonal belsejét? (c) a külsejét?
(d) a 0 középpontú köröket? (e) a 0-n átmenő egyeneseket?

2. Valamely $m > 1$ egész számra tekintsük az összes $Z_m \to \mathbb{C}$ függvények (m szerint periodikus komplex számsorozatok) halmazát. Definiáljuk az $a(n)$ és $b(n)$ sorozatok összegét és *konvolúcióját* a következőképpen:

$$(a+b)(n) = a(n) + b(n); \qquad (a * b)(n) = \sum_{k=0}^{m-1} a(k)b(n-k).$$

Igazold, hogy a sorozatok ezzel a két művelettel egységelemes gyűrűt alkotnak.

3. Legyen $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$ az első m-edik komplex egységgyök. Definiáljuk egy m szerint periodikus $a(n)$ sorozat *véges Fourier-transzformáltját* így:

$$\hat{a}(n) = \sum_{k=0}^{m-1} a(k)\varepsilon^{nk}.$$

Igazold, hogy $\widehat{(a * b)}(n) = \hat{a}(n) \cdot \hat{b}(n)$.

4. Írd fel a véges Fourier-transzformált inverzét!

5. Legyen f egy komplex együtthatós, nem konstans polinom. Igazold, hogy a $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ függvényeknek sehol sincs lokális szélsőértékhelye, továbbá az $|f|$ függvénynek csak olyan helyen lehet szélsőértéke, ahol $f = 0$.

6. Bizonyítsd be a következő állításokat!
a) Ha a P polinom gyökei az $x \geq 0$ félsíkba esnek, akkor P' gyökei is.
b) (Gauss tétele) Ha $P(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)^{k_j}$ alakú polinom, akkor $P'(z)$ minden gyöke benne van z_1, z_2, $\ldots$, z_n pontok konvex burkában.
c) A z_1, z_2, $\ldots$, z_n pontok konvex burkában az összes $\prod_{j=1}^{n}(z - z_j)^{k_j} = P(z)$ alakú polinomok $P'(z)$ deriváltjainak gyökei sűrű halmazt alkotnak.

7. Legyen $\{z_k\}$ nem torlódó sorozat a síkon és legyen tetszőleges $r > 0$ esetén $n(r)$ a 0 középpontú, r sugarú körbe eső pontok száma. Igazoljuk, hogy

$$\inf\{\beta \geq 0 : \ \exists r_0 \ \forall r \geq r_0 \ n(r) < r^\beta\} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r}.$$

Nevezzük ezt a számot a sorozat *sűrűségének.*

Házi feladatok

8. Mutassuk meg, hogy minden nemnegatív szám és a ∞ is előáll, mint valamilyen sorozat sűrűsége.

9. Mutasd meg, hogy a $p(z) = 3z^4 + 2z^3 + z^2 + A$ -nak tetszőleges $A \in \mathbb{C}$ esetén van gyöke az $x \geq 0$ jobb félsíkban!

10. Igazold, hogy a $q(z) = z^4 - 24z^2 + 3iz + \pi + ie$ -nek vannak olyan α és β gyökei, hogy $|\alpha - \beta| \geq 4$!

11. Ellenőrizzük, hogy az $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ függvény 0-ban ugyan nem differenciálható, de a CRPDE-t kielégíti!

12. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Cauchy-Riemann egyenletek a következő függvényekre:

$$(x^2 + y^2, 2xy); \qquad (x^2 - y^2, 2xy); \qquad (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

13. Igazoljuk a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy a $-1, 1$ fókuszú ellipszisek és hiperbolák merőlegesen metszik egymást.

14. Hol konvergensek a következő hatványsorok?

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n}.$$