Komplex függvénytan gyakorlat, 2006. október 16.

1. Igazoljuk, hogy a $\frac{z}{\sin z}$ és az $\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ függvények analitikusan folytathatók a 0-ban.

2. Fejtsük hatványsorba az $1/z$ és az $1/(z^2-1)$ függvényeket az i körül, és számoljuk ki a konvergenciasugarat.

3. Legyen $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$. Ellenőrizzük az együtthatóformulát az $|z| = \frac{1}{2}$ körön. (Cseréljük ki a kört egy nagy, R körre, és nézzük meg, hogy mi történik, ha $R \to \infty$.)

4. Mutass olyan nem azonosan 0 függvényt, ami reguláris az egységkör belsejében, és ott végtelen sok gyöke van. Miért nem mond ez ellent az unicitás-tételnek?

5. Igazoljuk, hogy ha f kétszeresen periódikus egész függvény (azaz $f(z+a) = f(z), f(z+b) = f(z)$ és az a, b periódusok nem egy közös c periódus egész számú többszörösei), akkor f konstans.

6. Mutassuk meg, hogy ha az f egész függvény valós értékeket vesz fel minden valós és minden tiszta képzetes z-re, akkor f páros függvény.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy f egészfüggvény a síkot az egységkör külsejébe képezi, akkor konstans.

8. Az f függvény reguláris az $|z| < 1+\varepsilon$ körlemezen és sehol sem tűnik el (nem 0) az egységkörvonalon. Legyen $A = \max\limits_{0\le t\le\pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max\limits_{\pi\le t\le 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsd be, hogy $|f(0)| \le \sqrt{AB}$.

Házi feladatok

9. Mutassuk meg, hogy ha f és g olyan egész függvények, hogy $|f| \le |g|$, akkor $f = c \cdot g$ egy $|c| \le 1$ konstanssal.

10. Igazoljuk, hogy ha egy f egészfüggvény minden értéke a -1, 1 pontokat összekötő szakaszon kívülre esik, akkor f konstans.

11. Legyen $f(z)$ egész függvény, $f(z+\pi) = f(z)$, és tegyük fel, hogy $\dfrac{f(z)}{e^{|\operatorname{Im} z|}}$ korlátos. Bizonyítsd be, hogy f konstans.

12. Írd fel az $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ függvény Laurent-sorát az $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ és $|z| > 2$ tartományokon. Számítsuk ki az együtthatókat az együtthatóformulából is.

További feladatok

13. Az idei olimpiai shortlistben szerepelt a következő feladat.

> *Az $a_0, a_1, \ldots,$ sorozatban $a_0 = -1$ és tetszőleges $n \ge 1$-re $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1} = 0$. Igazoljuk, hogy $n \ge 1$ esetén $a_n > 0$.*

Oldjuk meg a feladatot komplex függvénytani eszközökkel; mutassuk meg, hogy

$$a_n = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n(\pi^2 + \log^2(x-1))}.$$

14. Legyen $S(z) = z\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Igazold, hogy

(a) ez a végtelen szorzat a teljes komplex számsíkon értelmes;

(b) $S(z+\pi) = -S(z)$;

(c) ha a komplex számsíkból a π minden többszörösének elhagyjuk egy $\frac{1}{3}$ sugarű környezetét, akkor a megmaradt tartományon az $1/S(z)$ függvény korlátos;

(d) az $\frac{1}{S(z)} - \frac{1}{\sin z}$ függvény korlátos, és csak megszüntethető szingularitásai vannak;

(e) $S(z) = \sin z$.

15. Bizonyítsd be, hogy $\cos z = \displaystyle\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$ és $\operatorname{ctg} z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}$.