Komplex függvénytan gyakorlat, 2006. november 13.

1. Mutassuk meg, hogy ha f reguláris és g-nek pólusa van az a pontban, ezenfelül $\lim_{z\to a} \sqrt{|f(z)|}\cdot|g(z)| = 2$, akkor $f(a) = f'(a) = 0$.

2. Igazoljuk a maximum-elv felhasználásával, hogy egy nem konstans, valamilyen nyílt tartományon reguláris függvény valós (képzetes) részének nincs lokális szélsőértékhelye.

3. Igazoljuk, hogy ha f-nek a-ban izolált szingularitása van, és vannak olyan $z_n \to a$ és $w_n \to a$ sorozatok, hogy $f(z_n) \to 1$, $f(w_n) \to 2$, akkor van olyan $s_n \to a$ sorozat is, hogy $f(s_n) \to 3$.

4. Lehet-e az f függvény izolált szingularitása e^f-nek pólusa?

5. Fejtsd Laurent-sorba az $e^{z+1/z}$ függvényt a 0 körül.

6. Legyen $R(z)$ olyan racionális törtfüggvény, melynek pólusai és gyökei mind páros multiplicitásúak. Ekkor van olyan $Q(z)$ racionális törtfüggvény, hogy $R = Q^2$.

Házi feladatok

7. Számítsd ki (például L'Hospital szabállyal) a $\operatorname{ctg} z$ és a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény Laurent-sorának első 6 tagját (z^{-1}-től z^{-6}-ig) a $0 < |z| < \pi$ tartományon.

8. Számítsd ki a $\operatorname{ctg} z$ függvény Laurent sorának első 4 tagját a $\frac{\pi}{2} < \left|z - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{3\pi}{2}$ gyűrűn. (Használd az együtthatóformulát és az előző feladat végeredményeit.)

9. Mi a $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z}, \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}, \ldots, \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^5}$ függvények reziduuma a 0 körül?

10. Az f függvénynek lényeges szingularitása van a z_0 pontban. Igazoljuk, hogy tetszőleges L egyees szakaszhoz és $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $z \neq z_0$, amelyre $|z - z_0| < \varepsilon$ és $f(z) \in L$. (A Picard-tételt ne használjuk.)

11. Az f függvény akárhányszor integrálható a $1 < |z| < 2$ gyűrűn. Igazoljuk, hogy analitikusan folytatható a teljes $|z| < 2$ körlapra.

További feladatok

12. (Parseval-formula Laurent-sorokra.) Tegyük fel, hogy az $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ Laurent-sor konvergens az $r - \varepsilon < |z| < r + \varepsilon$ körgyűrűn. Igazold, hogy

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{|z|=r} |f(z)|^2 \cdot |\,\mathrm{d}z| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

13. Az f függvény reguláris az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Igazoljuk, hogy

$$\log|f(0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(e^{it})|\,\mathrm{d}t.$$

Mikor áll egyenlőség?