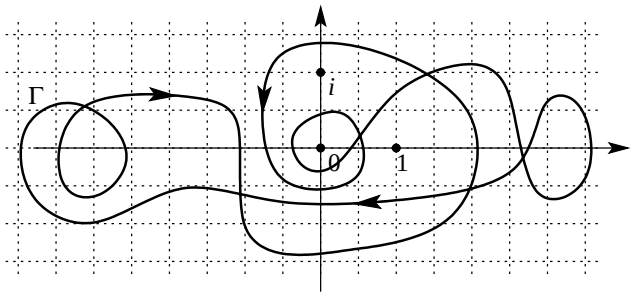
**KFT ZH, 2006. december 11.**

**1.** Fejtsük Laurent-sorba az $\dfrac{e^z}{z-1}$ függvényt a 0 körül, az $|z| > 1$ tartományon.

**2.**




$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+1} = ?$$

**3.**

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

**4.** Legyen $|a| = 3$. Hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a $z^4 + z^3 + az - 1$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ tartományon?

**5.** Legyen $D_1 = \{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z\}$ és $D_2 = \{z:\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Mutassunk példát (képletet) $D_1 \to D_2$ konform leképezésre.

**6.** Az $f$ függvény reguláris az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlapon véges sok pólus kivételével és $f(0) = 1$. A függvény gyökei és pólusai az egységkör belsejében $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$, illetve $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (minden gyököt és pólust annyiszor sorolunk fel, amennyi a multiplicitása). Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \log|f(z)| \cdot |dz| = \log\left|\frac{p_1 p_2 \ldots p_m}{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n}\right|.$$

(Ha egyáltalán nincs gyök vagy pólus, akkor a megfelelő szorzat értéke 1.)

**7.** Igazoljuk, hogy ha $0 < r_1 < r_2 < r_3$ és az $f$ függvény reguláris az $r_1 < |z| < r_3$ tartományon és folytonos a határán, akkor

$$\left(\max_{|z|=r_2} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_1)} \le \left(\max_{|z|=r_1} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_2)} \left(\max_{|z|=r_3} |f(z)|\right)^{\log(r_2/r_1)}.$$

(Hadamard-féle három kör tétel)

* * *

A kijavított dolgozatok átvehetők, és a gyakorlati jegyek beírathatók szerdán, 12 és 13 óra között a szobámban (3-302).

**Megoldásvázlatok a 2006. december 11-i KFT ZH-hoz**

**1.** Első megoldás. Írjuk fel az együtthatóformulát egy 1-nél nagyobb sugarú körre, majd a kört cseréljük ki 1-nél kisebb sugarúra. (Közben átugorjuk az 1-beli pólust.) Ezáltal áttérhetünk a 0 körüli hatványsorra.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)z^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{(z-1)z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

Az 1-beli reziduum értéke $\frac{e^1}{1^{n+1}} = e$. Az utolsó integrál a 0 körüli hatványsor $n$-edik együtthatója. Összeszorozva az $e^z = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ és $\frac{1}{z-1} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ sorokat, ez az együttható $-\sum\limits_{0\le k\le n} \frac{1}{k!}$. Tehát $a_n = e - \sum\limits_{k\le n} \frac{1}{k!}$.

Második megoldás: szorozzuk össze az $e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ és $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z^{-k}$ Laurent-sorokat.

**2.**

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma = (-1)\cdot \operatorname*{Res}_{-\pi/2} +1\cdot \operatorname*{Res}_{i} +1\cdot \operatorname*{Res}_{-1} = -\frac{-1}{(\pi/2)^2+1} + \frac{\operatorname{tg} i}{2i} + \frac{\operatorname{tg}(-i)}{-2i} = \frac{4}{\pi^2+4} + \frac{e^2-1}{e^2+1}.$$

**3.**

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \pi i \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{\pi}{2e}.$$

**4.** A Rouché-tételt alkalmazzuk az $|z|=1$ és $|z|=2$ körökre.
A $|z|=1$ körön $|z^4+z^3-1| < 3 = |az|$, a körön belül tehát 1 gyök van.
A $|z|=2$ körön $|z^3+az-1| \le 15 < |z^4|$, a körön belül 4 gyök van.
A két kör között a gyökök száma $4-1=3$.

**5.** A $z \mapsto e^{\pi i z}$ függvény a $D_1$ tartományt az egységkör felső felébe képezi. Ezt a félkört a $\frac{1}{z+1}$ függvény a $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z < 0$ negyedsíkba viszi. Ezt az $z \mapsto i(z-\frac{1}{2})$ függvény $D_2$-be forgatja. Tehát egy lehetséges megoldás: $f(z) = i\left(\dfrac{1}{e^{\pi i z}+1} - \dfrac{1}{2}\right)$.

**6.** Legyen $g(z) = f(z)\cdot\prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1-\overline{\varrho_j}z}{z-\varrho_j}\cdot\prod\limits_{j=1}^{m} \dfrac{z-p_j}{1-\overline{p_j}z}$. A körvonalon $|f|=|g|$, továbbá $g(0) = (-1)^{m+n}\dfrac{p_1p_2\dots p_m}{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_n}$.

A $g$-nek nincs sem gyöke, sem pólusa az egységkörben, tehát értelmezhető a logaritmusa; legyen $h$ a $\log g$ egyik reguláris ága. A $h$ reguláris, ezért $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{it})\,\mathrm{d}t = h(0)$, és

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{it})|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(e^{it})|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(e^{it})\,\mathrm{d}t = \operatorname{Re} h(0) = \log|g(0)| = \left|\frac{p_1p_2\dots p_m}{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_n}\right|.$$

**7.** A maximum-elvet fogjuk alkalmazni az $f(z)^p/z^q$ függvényre, alkalmas $p>0$ és $q$ egész számokkal. A $p,q$ értékeket úgy választjuk meg, hogy a függvény maximuma az $r_1$ és $r_3$ sugarú körökön kb. megegyezzen. Legyen $m_i = \max\limits_{|z|=r_i} |f(z)|$ $(i=1,2,3)$, $u = \dfrac{\log\frac{m_3}{m_1}}{\log\frac{r_3}{r_1}}$ és $\varepsilon>0$ tetszőleges. Válasszunk olyan $p>0$ és $q$ egész számokat, amikre $\left|\frac{q}{p}-u\right| < \varepsilon$, és alkalmazzuk a maximum-elvet az $\dfrac{(f(z))^p}{z^q}$ függvényre:

$$\max_{|z|=r_2}\left|\frac{(f(z))^p}{z^q}\right| = \frac{m_2^p}{r_2^q} \le \max\left(\max_{|z|=r_1}\left|\frac{(f(z))^p}{z^q}\right|, \max_{|z|=r_3}\left|\frac{(f(z))^p}{z^q}\right|\right) = \max\left(\frac{m_1^p}{r_1^q}, \frac{m_3^p}{r_3^q}\right);$$

$$m_2 \le \max\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{q/p} m_1, \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{q/p} m_3\right) < \max\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{u+\varepsilon} m_1, \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{u-\varepsilon} m_3\right) < \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^{\varepsilon} \max\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{u} m_1, \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{u} m_3\right).$$

Ez minden $\varepsilon$-ra igaz, tehát

$$m_2 \le \max\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{u} m_1, \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{u} m_3\right).$$

Az $u$ választása miatt $\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^u m_1 = \left(\dfrac{r_2}{r_3}\right)^u m_3$, továbbá $\log(r_3/r_2) + \log(r_2/r_1) = \log(r_3/r_1)$, így

$$m_2^{\log(r_3/r_1)} \le \left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^u m_1\right)^{\log(r_3/r_2)} \left(\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^u m_3\right)^{\log(r_2/r_1)} = m_1^{\log(r_3/r_2)} m_3^{\log(r_2/r_1)}.$$