Komplex függvénytan gyakorlat, 2009. október 8.

1. Milyen alakú lehet egy infinitezimálisan kicsi háromlábú pók ősképe egy nem konstans reguláris függvény szerint, ha a lábai éppen olyan hosszúak, mint a (kör alakú) testének átmérője?

2. A maximum-elv felhasználával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény reguláris és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

3. Az együtthatóbecslés segítségével igazoljuk, hogy ha $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ az egész síkon konvergens és $|f(z)| \leq e^{|z|}$, akkor $|a_n| \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

4. A Liouville-tételből vezessük le, hogy ha egy egészfüggvény a síkot az egységkör külsejébe képezi, akkor konstans.

5. Fejtsük Laurent-sorba az $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ függvényt az $1 < |z| < 2$ tartományon. Számítsuk ki az együtthatókat az együtthatóformulából is.

6. Az f függvény akárhányszor integrálható a $1 < |z| < 2$ gyűrűn. Igazoljuk, hogy analitikusan folytatható a teljes $|z| < 2$ körlapra.

7. Az f függvény reguláris az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max_{0 \leq t \leq \pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max_{\pi \leq t \leq 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsd be, hogy $|f(0)| \leq \sqrt{AB}$.

Házi feladatok

8. Bizonyítsuk be, hogy egy nem konstans egészfüggvény valós része nem lehet korlátos sem alulról, sem felülről.

9. Igazoljuk, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (azaz $f(z+a) = f(z), f(z+b) = f(z)$ és az a, b periódusok nem egy közös c periódus egész számú többszörösei), akkor f konstans.

10. Fejtsd Laurent-sorba az $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ függvényt a $0 < |z| < 1$ és a $2 < |z|$ tartományokon.

11. Legyen $f(z)$ legyen értelmezve és folytonos a $\{|z| \leq 1\} \setminus \{1\}$ halmazon, reguláris a belsejében, és $|f(z)| \leq 1 \ \ (|z| = 1, \ z \neq 1)$. Igaz-e, hogy ekkor $|f(z)| \leq 1 \ \ (|z| < 1)$?

12. Milyen a pozitív valós számokra igaz, hogy ha $f(z)$ egészfüggvény, $f(z+1) = f(z)$, és $f(z)e^{-a|\operatorname{Im} z|}$ korlátos, akkor f konstans?