Komplex függvénytan gyakorlat, 2009. október 15.

1. Igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ függvény reguláris az a pont egy pontozott környezetében, és ott $f|(z)| > 1$, akkor a megszüntethető szingularitás vagy pólus.

2. Tegyük fel, hogy f-nek m-edrendű pólusa van a-ban, és p egy n-edfokú polinom. Mutassuk meg, hogy $p\,(f(z))$ függvénynek mn-edrendű pólusa van a-ban.

3. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mennyi ott a reziduumuk?

$$\frac{1}{z^2}; \qquad \frac{1}{\sin z}; \quad \sin\frac{1}{z}; \quad \frac{e^z}{z^2+4}; \quad \frac{e^z}{(z^2+4)^2}; \quad \frac{e^z}{(z^2+4)^3}$$

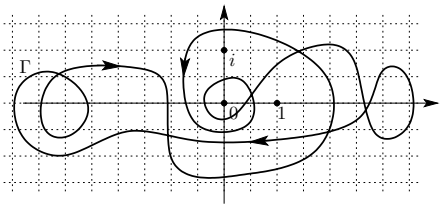
4. Legyen $a \in (0,1)$ valós szám.

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

5. Számítsuk ki a $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ függvény reziduumaból a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ összeget. Utána számoljuk ki teleszkóposan is, hogy összehasonlítsuk az eredményt.

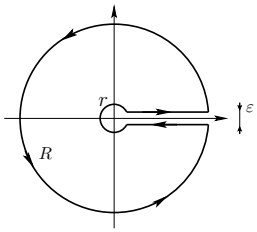
6.

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+1} = ?$$



7. Lehet-e az f függvény izolált szingularitása $\sin f$-nek pólusa?

8. Legyen $\Gamma_{r,R,\varepsilon}$ az ábrán látható görbe, ahol R nagy, r kicsi és ε még r-nél is sokkal kisebb. Milyen összefüggést kapunk a $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\lim_{r\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r,R,\varepsilon}}\frac{\log z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$ határérték vizsgálatából?

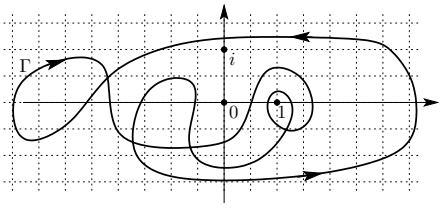


Házi feladatok

9. Mutassuk meg, hogy ha f reguláris és g-nek pólusa van az a pontban, ezenfelül $\displaystyle\lim_{z\to a}\sqrt{|f(z)|}\cdot|g(z)| = 2$, akkor $f(a) = f'(a) = 0$.

10.

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{ctg} z}{z^8 - z^6 - z^4 + z^2}\,\mathrm{d}z = ?$$



11.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = ? \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ? \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = ? \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = ? \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = ?$$