**Komplex függvénytan ZH, 2009. október 22.**
**Megoldások**

**1.** A komplex sík mely pontjaiban differenciáható a $z \mapsto \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z + i|z|^2$ függvény?

**Megoldás.** Az $(x, y) \mapsto (x - y, x^2 + y^2)$ függvény valós értelemben differenciáható, mert polinom. A komplex differenciáhatóság ezért ekvivalens azzal, hogy teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek:

$$D_1(x - y) = D_2(x^2 + y^2); \quad D_2(x - y) = -D_1(x^2 + y^2)$$
$$1 = 2y; \quad -1 = -2x$$
$$(x, y) = (1/2, 1/2).$$

A függvény tehát csak az $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ pontban differenciáható.

**2.** Legyen $\gamma$ az $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$ parabola azon íve, aminek kezdőpontja $-1 + i$, végpontja pedig $1 + i$.

$$\int_\gamma |z|^2 \overline{\mathrm{d}z} = ?$$

**Megoldás.** A parabolaív egy paraméterezése: $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [-1, 1]$.

$$\int_\gamma |z|^2 \overline{\mathrm{d}z} = \int_{-1}^{1} \left|\gamma(t)\right|^2 \overline{\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t} = \int_{-1}^{1} (t^2 + t^4)(1 - 2it)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{-1}^{1} (t^2 - 2it^3 + t^4 - 2it^5)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{i}{2}t^4 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{i}{3}t^6\right]_{t=-1}^{1} = \frac{16}{15}.$$

**3.**

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{3^z}{(z-1)^2(z+3)^2}\,\mathrm{d}z = ?$$

**Megoldás.** Az $f(z) = \dfrac{3^z}{(z+3)^2}$ függvény reguláris az $|z| < 3$ halmazon. A deriváltra vonatkozó Cauchy-formula szerint

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = f'(1) = \left(\frac{3^z \log 3}{(z+3)^2} - 2\frac{3^z}{(z+3)^3}\right)_{z=1} = \frac{3\log 3}{16} - \frac{3}{32}.$$

Tehát

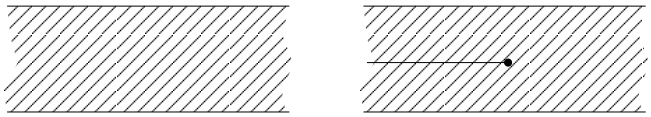
$$\int\limits_{|z|=2} \frac{3^z}{(z-1)^2(z+3)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \left(\frac{3\log 3}{16} - \frac{3}{32}\right) = \frac{3(2\log 3 - 1)\pi i}{16}.$$

**4.** Fejtsd Laurent-sorba a $\dfrac{z^3}{z^2 - 1}$ függvényt az $1 + 2i$ körül úgy, hogy előállítsa a függvényt a 0 egy környezetében. Mi az a legbővebb tartomány, ahol a Lauent-sor előállítja a függvényt?

**Megoldás.** Azt a Laurent-sort kell felírnunk, ami a $2 < |z - 1 - 2i| > 2\sqrt{2}$ körgyűrűn állítja elő a függvényt. Mivel a függvénynek az 1-ben és a $(-3)$-ban pólusa van, ez a legbővebb tartomány.

$$\frac{z^3}{z^2 - 1} = z + \frac{\frac{1}{2}}{z+1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1} = z + \frac{\frac{1}{2}}{(z - 1 - 2i) + (2 + 2i)} + \frac{\frac{1}{2}}{(z - 1 - 2i) + 2i} =$$
$$= z + \frac{\frac{1}{2(2+2i)}}{1 + \frac{z-1-2i}{2+2i}} + \frac{\frac{1}{2(z-1-2i)}}{1 + \frac{2i}{z-1-2i}} = z + \frac{1}{2(2+2i)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1-2i}{2+2i}\right)^k + \frac{1}{2(z-1-2i)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z-1-2i}\right)^k =$$
$$= (1 + 2i) + (z - 1 - 2i) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2 \cdot (2+2i)^{k+1}}(z - 1 - 2i)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2i)^k}{2}(z - 1 - 2i)^{-k-1}.$$

**5.** Mutass példát (képletet) konform megfeleltetésre a $D_1 = \{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}$ és a $D_2 = D_1 \setminus (-\infty, 0]$ tartományok között.



$D_1$ $D_2$

**Megoldás.** Ilyen megfeleltetés például a $z \mapsto \dfrac{1}{\pi} \log\left(e^{\pi z} + 1\right)$.

**6.** Az $f$ egészfüggvényre $\arg f(1/n) \equiv \dfrac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg f(2)$?

**Megoldás.** Tekintsük a $g(z) = f(z)e^{-\pi z^2}$ egészfüggvényt. Az $(1/n)$ sorozat mentén $g$ értéke tisztán valós. A $h(z) = \overline{g(\overline{z})}$ függvény is egészfüggvény, és $h(1/n) = g(1/n)$. Az unicitás-tétel szerint tehát $h = g$. Valós helyeken $g(x) = h(x) = \overline{g(\overline{x})} = \overline{g(x)}$, vagyis valós helyeken $g(x)$ is tisztán valós. Speciálisan $g(2) = f(2)$ is valós.

Ezek után három eset marad:

$f(2) > 0$, ilyen például az $f_1(z) = e^{\pi z^2}$ függvény;
$f(2) < 0$, ilyen például az $f_2(z) = e^{\pi z^2}\left(\frac{3}{2} - z\right)$ függvény;
$f(2) = 0$, ilyen például az $f_3(z) = e^{\pi z^2}(2 - z)$ függvény.

Tehát $\arg f(2)$ a $\pi$-nek többszöröse, vagy pedig nem létezik.

**7.** Bizonyítsd be, hogy ha az $f$ függvénynek lényeges szingularitása van a $z_0$ pontban, akkor $f$ a $z_0$ pont bármely pontozott környezetében felvesz legfeljebb 1 abszolút értékű valós értéket. (A Picard-tételt ne használd.)

**Megoldás.** Tételezzük fel, hogy az $z_0$ egy $\dot{U}$ pontozott környezetében mégsem vesz fel a függvény $[-1, 1]$-beli értéket. Legyen

$$g(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{f(z)} + 1}} \qquad (z \in \dot{U}),$$

ahol a $\sqrt{\ }$ a négyzetgyökfüggvény főértéke.

Az $\dot{U}$ halmazon az $\frac{1}{f} + 1$ függvény nem vesz fel nempozitív valós értéket, ezért a $\sqrt{\frac{1}{f(z)} + 1}$ függvény valóban értelmes, reguláris, és értékei a jobb félsíkba esnek. Végül $g(z)$ is létezik $\dot{U}$-n, és $|g(z)| < 1$.

A $g$ függvény korlátos a $\dot{U}$ halmazon; ebből következik, hogy a $z_0$ pontban megszüntethető szingularitása van.

Ha $g$-nek $k$-szoros gyöke van $z_0$-ban (lehet $k = 0$ is), akkor az

$$f(z) = \left(\frac{1}{g(z)} - 1\right)^2 - 1$$

függvénynek ugyanott $2k$-adrendű pólusa van ($k = 0$ esetén megszünthető szingularitása).