Komplex függvénytan ZH, 2009. december 3.
Megoldások

1. *Hány gyöke van a* $\cos z = 2z^3$ *egyenletnek az egységkörben?*

Megoldás. A Rouché-tételt alkalmazzuk. Megmutatjuk, hogy a körvonalon $|2z^3| > |\cos z|$.

Mivel e^{iz} és e^{-iz} szorzata 1, valamelyik abszolút értéke legfeljebb 1. Mivel $\mathrm{Re}(iz) \le 1$, azt is tudjuk, hogy $|e^{iz}| \le e$. Ezért

$$|\cos z| = \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right| \le \frac{e+1}{2} < 2 = |2z^3|.$$

A Rouché-tétel szerint a kör belsejében a $2z^3 - \cos z$ függvénynek (multiplicitással számolva) ugyanannyi gyöke van, mint a $2z^3$ függvénynek, vagis 3.

Megjegzés. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a $2z^3 - \cos z$ függvénynek egy egyszeres valós gyöke van, a másik két gyök egymás konjugáltja. A három gyök tehát különböző.

2.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^7+1} = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

1. megoldás. Legyen $r > 2$, és $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ a baloldali ábrán látható görbe. Az $\dfrac{1}{z^7+1}$ függvénynek elsőrendű pólusa van az $e^{\pi i/7}$ pontban, és itt a reziduuma

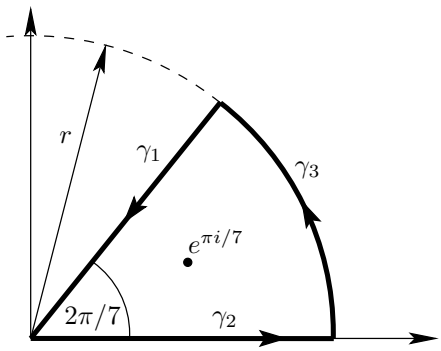
$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/7}}\left(\frac{1}{z^7+1}\right) = \left.\frac{1}{(z^7+1)'}\right|_{z=e^{\pi i/7}} = \left.\frac{1}{7z^6}\right|_{z=e^{\pi i/7}} = \frac{1}{7e^{6\pi i/7}}.$$

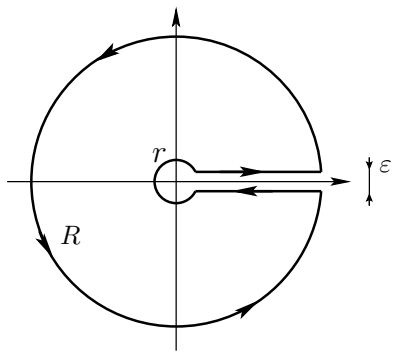
A reziduumtétel szerint

$$\frac{1}{7e^{6\pi i/7}} = \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/7}}\left(\frac{1}{z^7+1}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^7+1} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}\right) = \frac{1-e^{2\pi i/7}}{2\pi i}\int_0^r \frac{\mathrm{d}x}{x^7+1} + O\left(\frac{1}{r^6}\right).$$

Az $r \to \infty$ határátmenetből tehát

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^7+1} = \frac{1}{7e^{6\pi i/7}}\cdot\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i/7}} = \frac{2\pi i}{7e^{7\pi i/7}\left(e^{-\pi i/7}-e^{\pi i/7}\right)} = \frac{\pi}{7\sin\frac{\pi}{7}}.$$





2. megoldás. Legyen $0 < r < 1 < R$, és integráljuk a $\dfrac{\log z}{z^7+1}$ függvényt a jobboldali ábrán látható γ görbén. Az $\log z$ argumentumát 0 és 2π között választuk.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\log z}{z^7+1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_r^R \frac{\log x}{x^7+1}\,\mathrm{d}x - \int_r^R \frac{\log x + 2\pi i}{x^7+1}\,\mathrm{d}x\right) + O\left(r\log\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{\log R}{R^6}\right) =$$
$$= -\int_r^R \frac{\log x}{x^7+1}\,\mathrm{d}x + O\left(r\log\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{\log R}{R^6}\right).$$

Az integrandusnak az $e^{(2k+1)\pi i/7}$ alakú ($k = 0, 1, \ldots, 6$) helyeken van pólusa, és

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{(2k+1)\pi i/7}} \frac{\log z}{z^7+1} = \frac{(2k+1)\pi i/7}{7e^{6(2k+1)\pi i/7}} = \frac{(2k+1)\pi i}{49}e^{-6(2k+1)\pi i/7}.$$

Mivel a kiszámolhandó integrál tisztán valós, elég a valós részt kiszámolni:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^7+1} = -\sum_{k=0}^{6}\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{z=e^{(2k+1)\pi i/7}} \frac{\log z}{z^7+1}\right) = -\sum_{k=0}^{6}\operatorname{Re}\left(\frac{(2k+1)\pi i}{49}e^{-6(2k+1)\pi i/7}\right) =$$
$$= -\sum_{k=0}^{6}\frac{(2k+1)\pi}{49}\sin\frac{6(2k+1)\pi}{7} = \frac{12\pi}{49}\sin\frac{\pi}{7} + \frac{4\pi}{49}\sin\frac{2\pi}{7} + \frac{8\pi}{49}\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Megjegyzés. Mivel a hetedik egységgyökök összege 0,

$$\sum_{k=0}^{6}\frac{(2k+1)\pi i}{49}e^{-6(2k+1)\pi i/7} = \sum_{k=0}^{6}\frac{(2k-7)\pi i}{49}e^{-6(2k+1)\pi i/7},$$

és az integrál képzetes része valóban kiesik.

Egy másik lehetőség, hogy nem a $\dfrac{\log z}{z^7+1}$, hanem a $\dfrac{\log z - \pi i}{z^7+1}$ függvényt integráljuk.

3.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+k+1} = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

Megoldás. Ahogy a gyakorlaton tanultuk, a $\dfrac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2+z+1}$ összes reziduumainak összege 0. A függvénynek az egész helyeken kívül egyszeres pólusa van a $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ pontokban;

$$\operatorname*{Res}_{z=k\in\mathbb{Z}} \frac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2+z+1} = \frac{1}{k^2+k+1},$$

és

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2+z+1} = \frac{\pi\operatorname{ctg}\left(\pi\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)}{2\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1} = \frac{\pi i\dfrac{e^{\pi i(-1\pm\sqrt{3}i)}+1}{e^{\pi i(-1\pm\sqrt{3}i)}-1}}{\pm\sqrt{3}i} = \frac{\pi}{\pm\sqrt{3}}\cdot\frac{-e^{\mp\sqrt{3}\pi}+1}{-e^{\mp\sqrt{3}\pi}-1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{e^{\sqrt{3}\pi}-1}{e^{\sqrt{3}\pi}+1}.$$

Tehát,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname*{Res}_{z=k}\frac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2+z+1} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{e^{\sqrt{3}\pi}-1}{e^{\sqrt{3}\pi}+1}.$$

---

4. *Legyen $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Igazold, hogy tetszőleges $f : D \to D$ reguláris függvényre*

$$|f'(z)| \le \frac{\operatorname{Re} f(z)}{\operatorname{Re} z}.$$

1. megoldás. Rögzítsük a $z = a + bi$ számot, és legyen $f(z) = c + di$.

Legyen $g(w) = a\dfrac{1+w}{1-w} + bi$; ez az a lineáris tört függvény, ami az egységkörlemezt a jobb félsíkra képezi úgy, hogy $g(-1) = bi$, $g(0) = a + bi$ és $g(1) = \infty$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $g'(w) = \dfrac{2a}{(1-w)^2}$ és így $g'(0) = 2a$.

Hasonlóan, legyen $h(w) = \dfrac{\frac{w-di}{c} - 1}{\frac{w-di}{c} + 1} = \dfrac{w - c - di}{w + c - di}$; ez a lineáris tört függvény a jobb félsíkot az egységkörlemezre képezi úgy, hogy $h(di) = -1$, $h(c + di) = 0$ és $h(\infty) = 1$. Szintén könnyen ellenőrizhető, hogy $h'(w) = \dfrac{2c}{(w + c - di)^2}$ és $h'(c + di) = \dfrac{1}{2c}$.

Alkalmazzuk a Schwarz-lemmát a $h \circ f \circ g$ függvényre. Ez az egységkörlemezt önmagára képezi, és a 0 képe a 0. A Schwarz-lemma szerint tehát

$$\big|(h \circ f \circ g)'(0)\big| \le 1$$
$$\big|h'(c + di)\big| \cdot \big|f'(a + bi)\big| \cdot \big|g'(0)\big| \le 1$$
$$\big|f'(z)\big| = \big|f'(a + bi)\big| \le \frac{1}{\big|h'(c + di)\big| \cdot \big|g'(0)\big|} = \frac{c}{a} = \frac{\operatorname{Re} f(z)}{\operatorname{Re} z}.$$

2. megoldás. Tekintsük a $g(w) = \dfrac{f(az + bi) - di}{c}$ függvényt. Ez reguláris $D \to D$ függvény, és $g(1) = 1$. A gyakorlaton tanultak szerint tehát $|g'(1)| \le 1$.

Mivel $g'(1) = \dfrac{a}{c} f'(a + bi)$,

$$|f'(z)| = |f'(a + bi)| = \frac{c}{a}|g'(1)| \le \frac{c}{a} = \frac{\operatorname{Re} f(z)}{\operatorname{Re} z}.$$

---

5. *Legyen $D = \{z : \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2},\ |z| > 1\}$.*

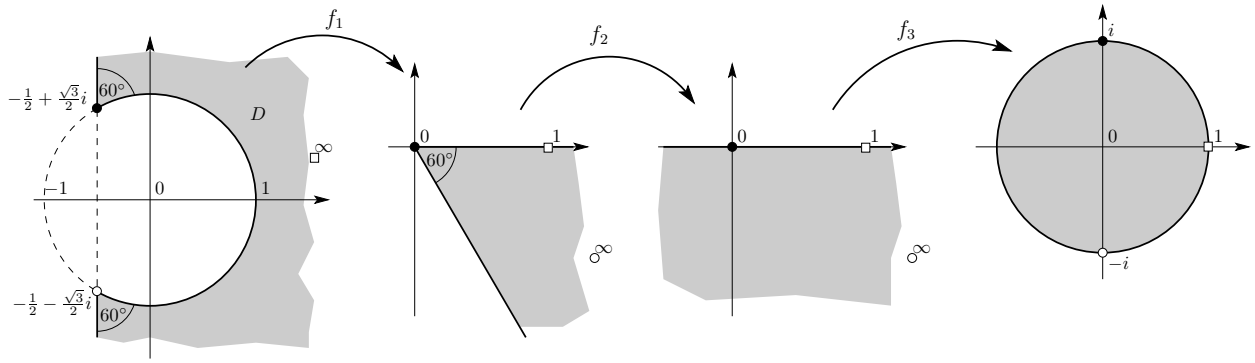
(a) írd fel azt a φ konform leképezést, ami D-t megfelelteti az egységkörnek úgy, hogy $\varphi(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = i$, $\varphi(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -i$ és $\varphi(\infty) = 1$.

(b) Igazold, hogy φ kiterjeszthető az egész síkon meromorf függvénnyé.

(c) Hány pólusa van a kiterjesztett φ-nek? Mi a rendje ezeknek a pólusoknak?

Megoldás. (a) Az egységkörvonal és a $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$ egyenes a $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ pontokban metszik egymást, és a két metszéspontban 60°-os szöget zárnak be.

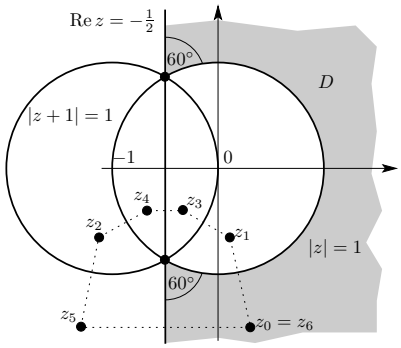
A keresett leképezést három függvény kompozíciójaként állítjuk elő. Az $f_1(z) = \dfrac{z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ függvény a tartományt egy 60°-os szögtartományba viszi, amelynek csúcsa $f_1(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 0$, továbbá $f_1(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \infty$ és $f_1(\infty) = 1$. Az 1 pont a szögtartomány határára esik, tehát a szög egyik szára a valós tengely pozitív iránya. A $\infty, 1, 0$ pontok pozitív irányítás szerint következnek a határon, ezért a szögtartomány a valós tengely alatt van, és a másik szögszár a $-60°$ irányú félegyenes.



Az $f_2(z) = z^3$ a szögtartományt az alsó félsíkba viszi úgy, hogy $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = 1$ és $f_2(\infty) = \infty$. Az $f_3(z) = \dfrac{-iz+1}{z-i}$ függvény az alsó félsíkot az egységkörbe viszi, $f_3(0) = i$, $f_3(1) = 1$ és $f_3(\infty) = -i$. Tehát

$$\varphi(z) = f_3\Big(f_2\big(f_1(z)\big)\Big) = \frac{-i\left(\dfrac{z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^3+1}{\left(\dfrac{z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^3-i} = \frac{-i\Big(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3+\Big(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3}{\Big(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3-i\Big(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3}. \tag{1}$$

(b) Rajzoljuk meg az $|z+1| = 1$ kört is. A két kör és a $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$ egyenes páronként 60°-os szöget zár be egymással, és közülük bármelyik kettő szimmetrikus a harmadikra. A két kör és az egyenes a síkot összesen 6 tartományra osztja. A hat tartományt sorban tükrözve, a függvényt mindegyikre folytathatjuk. Azt állítjuk, hogy a hat tükrözés egymás utánja az identitás. Mivel minden tükrözés egy-egy lineáris tört konjugáltja, a hat tükrözés egymás utánja egy lineáris tört, és elég azt ellenőriznünk, hogy három pont helyben marad. A $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ pontokra ez triviális, mert ezek minden tükrözésnél helyben maradnak. Egy harmadik pont lehet például a ∞; ennek tükörképe az egységkörre a 0, ennek tükörképe az egyenesre a -1, ennek tükörképe a másik körre a ∞.



Ha $z_0 \in D$ egy tetszőleges pont, amelynek tükörképei rendre $z_1, \ldots, z_5, z_6 = z_0$, akkor a kiterjesztett függvény értékei ezeken $\varphi(z_2) = \varphi(z_4) = \varphi(z_0)$, illetve $\varphi(z_1) = \varphi(z_3) = \varphi(z_5) = \dfrac{1}{\overline{\varphi(z_0)}}$.

(c) Mivel φ konform leképezés D-ről az egységkörre, φ a D-nek egy pontjában veszi fel a 0-t, és a deriváltja sehol sem 0. A függvénynek tehát egyetlen, egyszeres gyöke van D-ben, pólusa nincs. A tükrözés miatt a gyök második és negyedik tükörképe is egyszeres gyök, az első, harmadik és ötödik tükörképekben pedig elsőrendű pólus van.

Tehát összesen három pólusa van a kiterjesztett φ-nek, mindhárom pólus elsőrendű.

Megjegyzések. 1. Az (1) képlet közvetlenül megadja a kiterjesztést. Azt is leolvashatjuk, hogy három elsőrendű pólus van.

2. A pólusok akár a megoldásból, akár az (1) képletből kiszámíthatók: $-2-\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$ és $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

6. *Igazold, hogy tetszőleges a komplex számra*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{it}+a\right| \mathrm{d}t = \begin{cases} \log|a| & ha\ |a|>1, \\ 0 & ha\ |a|\le 1. \end{cases}$$

1. megoldás. Ha $|a|>1$, akkor a $f(z)=\log(z+a)$ függvény regulárisan értelmezhető a $|z|<|a|$ körlapon. A középérték-tulajdonság szerint

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt = f(0),$$

tehát

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{it}+a\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\operatorname{Re}\log\left(e^{it}+a\right)\Big) \mathrm{d}t =$$
$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(e^{it}+a\right) \mathrm{d}t\right) = \operatorname{Re}\log(0+a) = \log|a|.$$

Ha $|a|<1$, akkor a középérték-tulajdonságot a $g(z)=\log(1-\overline{a}z)$ függvényre alkalmazzuk. Mivel a $z\mapsto \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$ függvény az egységkörön egységnyi abszolút értékű,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{it}+a\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|(e^{it}+a)\cdot\frac{1-\overline{a}e^{it}}{e^{it}-a}\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|1-\overline{a}e^{it}\right| \mathrm{d}t = \log 1 = 0.$$

Az $|a|=1$ esetet határátmenettel kaphatjuk meg.

2. megoldás. Először feltesszük, hogy $|a|\neq 1$.
Felhasználjuk, hogy

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{2\pi ik/n}\right) = z^n-(-1)^n.$$

Az integált összeggel közelítve,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{it}+a\right| \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left|e^{2\pi ik/n}+a\right| = \lim_{n\to\infty}\log\left|\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{2\pi ik/n}+a\right)\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\log\left|a^n-(-1)^n\right|^{1/n}.$$

Ha $|a|<1$, akkor $a^n\to 0$ és $\left|a^n-(-1)^n\right|^{1/n}\to 1$; ha pedig $|a|>1$, akkor $\left|a^n-(-1)^n\right|^{1/n}\to |a|$.
Az $|a|=1$ esetet határátmenettel vagy további ügyeskedéssel kapjuk meg.

---

7. *Az f függvény a nyílt egységkört önmagára képezi úgy, hogy a határra folytonosan kiterjeszthető, és — multiplicitással számolva — minden értéket kétszer vesz fel. Bizonyítsd be, hogy a függvény deriváltjának pontosan egy gyöke van.*