Matematika problémamegoldó szeminárium, 2007. március 5.

1. Előáll-e az x^n függvény n darab periodikus függvény összegeként?

2. Adott a térben n különböző gömb. Az i-edik és a j-edik metszetének térfogata a_{ij}. Igazoljuk, hogy $\det(a_{ij}) > 0$.

3. Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat pozitív egészekből áll és végtelenhez tart. Mutassuk meg, hogy ha a

$$b_n = \frac{e^{a_n}}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

sorozat konvergens, akkor 0-hoz tart.

4. Az a, b, c egészekre $a, c > 0$, $ac = b^2 + b + 1$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan x, y egész számok, amikre

$$ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 = 1.$$

5. Határozuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amire $f(1) > 0$ és

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

6. Tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokhoz rendeljük az összesen $\binom{n}{2}$ kéttagú összegüket. Milyen n esetén határozzák meg a kéttagú összegek, amelyek sorrendjét nem ismerjük, az eredeti n számot?

7. Tegyük fel, hogy a, b, u, r pozitív értékű folytonos függvények, amikre

$$u^2(t) + r(t) \leq a(t) + 2\int_0^t u(s)b(s)ds, \qquad t > 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{u^2(t) + r(t)} \leq \sqrt{\sup_{s\in[0,t]} |a(s)|} + \int_0^t b(s)ds, \qquad t > 0.$$

8. Legyen $f(N)$ sz olyan x, y, z, u, v, w számhatosok száma, ahol $1 \leq x, y, z, u, v, w \leq N$ egészek, $x+y+z = u+v+w$ és $xyz = uvw$. $\lim \frac{f(N)}{N^3} =?$

9. (Angolul, írásban beadható) Len $n \geq 2$ be a positibe integer. Prove that

$$\prod_{k=2}^{n} \ln k < \frac{\sqrt{n!}}{n}.$$