Matematika problémamegoldó szeminárium, 2007. március 12.

1. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ egy divergens sor, amelynek tagjai pozitívak és monoton csökkennek. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n} = \infty.$$

2. Az n csúcsú teljes gráf élei közül kiválasztjuk néhány teljes páros részgráfját úgy, hogy mindegyik él páratlan sok páros gráfban szerepel. Mutassuk meg, hogy a páros gráfok száma legalább $n/2$.

3. Egy gömbháromszög oldalai a, b, c, szögei α, β, γ. Igazoljuk, hogy

$$a\cos\beta + b\cos\alpha < c.$$

4. A nemnegatív x, y számokra $x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3$. Igazoljuk, hogy $x^3 + y^3 \leq 2$.

5. Milyen n pozitív egészek esetén lehet az n csúcsú teljes gráfot háromszögekre bontani úgy, hogy minden élt pontosan egyszer használunk fel?

6. Igazoljuk, hogy tetszőleges n nemnegatív egtészre és x valós számra

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{x+k} > 0.$$

7. Határozzuk meg az $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ függvényt, amire tetszőleges $x, y > 0$ esetén

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} + \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}.$$

8. Legyen $a_0, a_1, \ldots$ nemnegatív számokból álló sorozat, amelyre tetszőleges $k, m \geq 1$ esetén

$$a_{n+m} \leq a_{k+m+1} + a_k a_m.$$

Tegyük fel, hogy elég nagy n esetén $na_n < 0,2499$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $0 < q < 1$ szám, amelyre elég nagy n esetén $a_n < q^n$.

9. (Angolul, írásban beadható) Let a_n be the coefficient of x^n in the polynomial $(x^2 + x + 1)^n$. Prove that $a_p \equiv 1 \pmod{p^2}$ for all primes $p > 3$.