Matematika problémamegoldó szeminárium, 2007. március 19.

1. Igaz-e, hogy ha $x_1, x_2, \ldots$ és $y_1, y_2, \ldots$ két korlátos számsorozat, amikre

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{és} \quad \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$$

konvergens, akkor

$$\frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{n}$$

is konvergens?

2. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív egészek és $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ egész, akkor abc teljes köb.

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arc\,ctg}(n^2 + n + 1) = ?$$

4. Legyen $c_1 < c_2 < \ldots$ pozitív egészek egy sorozata, amire $\frac{c_n}{n} \to A$. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{c_n}}{2 - x^{c_n}} = \frac{\ln 2}{A}.$$

5. Igazoljuk, hogy bármely pozitív elemekből álló, szimmetrikus mátrixnak a legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátaltere egydimenziós.

6. Legyen $n > 2$ és R egy (nem feltétlenül kommutatív) gyűrű, amiben teljesül az $x^n = x$ azonosság. Mutassuk meg, hogy $x^{n-1}y = yx^{-n-1}$ tetszőleges $x, y \in R$ esetén.

7. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvények, azaz tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + y) = f(x) + f(y)$ és $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Igazoljuk, hogy ha

$$f^{-1}\big((0, \infty)\big) = g^{-1}\big((0, \infty)\big),$$

akkor $f = c \cdot g$ valamilyen $c > 0$ konstanssal.

8. Tetszőleges $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinomra legyen

$$\Gamma(P) = a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha P minden gyökének negatív a valós része, akkor

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\Gamma(P^k)} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)^2.$$

9. (Angolul, írásban beadható) Let M be a symmetric, positive definite 3×3 matrix containing only integer entries and suppose $\det M = 1$. Prove that there exist integers x, y, z such that $(x, y, z) M (x, y, z)^T = 1$.