Matematika problémamegoldó szeminárium, 2007. március 26.

1. Egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt nevezzünk „erősen differenciálhatónak” az a pontban, ha tetszőleges $x_n \to a$, $y_n \to a$, $x_n \neq y_n$ sorozatokra a

$$\lim \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$$

határérték létezik és véges.

Mutassuk meg, hogy ha f differenciálható a egy környezetében és f' folytonos a-ban, akkor ott f erősen differenciálható.

Igaz-e, hogy ha f differenciálható a egy környezetében és erősen differenciálható a-ban, akkor f' folytonos a-ban?

2. Adottak a $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+1} = 1$ valós számok úgy, hogy $x_{i+1} - x_i \leq h$ minden $1 \leq i \leq 2n$-re. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

3. Adott egy X Banach-téren egy $f : X \to X$ leképezés és egy $q > 1$ valós szám úgy, hogy $||f(x) - f(y)|| \geq q||x - y||$ minden $x, y \in X$-re.

Mutassuk meg, hogy ha X véges dimenziós, akkor f-nek létezik fixpontja.

Igaz-e ugyanez végtelen dimenziós terekben?

4. Legyen A nemüres halmaz és $f : A^5 \to A$ egy olyan leképezés, amire teljesül az

$$f(y, x, x, y, y) = f(x, y, x, y, x) = f(x, x, y, x, y) = x$$

azonosság.

Az f és a kompozíció művelet segítségével írjunk fel egy olyan g függvényt, amire

$$g(y, x, x, y) = g(x, y, x, y) = g(x, x, y, x) = x.$$

5. Egy $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \ldots + a_nx^n$ polinom *palindrom*, ha $a_k = a_{n-k}$ minden k-ra. Igazoljuk, hogy ha egy valós együtthatós palindrom polinom együtthatói között páros sok nemnulla szerepel, akkor létezik egységnyi abszolút értékű (komplex) gyöke.

6. Az X valószínűségi változóra 1 valószínűséggel $0 < a \leq X \leq b$. Igazoljuk, hogy

$$D(X) \cdot D(1/X) \leq \frac{b-a}{4ab}.$$

7. Az A $n \times n$-es mátrix elemei nemnegatív számok, az összegük n.

(a) Igazoljuk, hogy $|\det A| \leq 1$.

(b) Mutassuk meg, hogy ha $|\det A| = 1$, akkor A minden sajátértéke egységnyi abszolút értékű.

8. (Angolul, írásban beadható) Let G be a finite group of order n. Show that each element of G is a square if and only if n is odd.