Matematika problémamegoldó szeminárium, 2007. május 7.

1. Legyen $p > 3$ prím és $n = \frac{1}{3}(4^p - 1)$. Igazoljuk, hogy $2^n - 1$ osztható n-nel.

2. Igazoljuk, hogy ha n darab $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény lineárisan független, akkor a deriváltjaik között is van legalább $n-1$ lineárisan független.

3. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, amire tetszőleges $|x| = 1$ esetén $x^t \cdot f(x) < 0$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}^n$, amire $|x_0| < 1$ és $f(x_0) = 0$.

4. Igazoljuk, hogy az $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ leképezés szürjektív.
Igaz-e ugyanez a valós mátrixok körében?

5.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 \sqrt[n]{1 + x^n}\,dx = ?$$

6. Igazoljuk, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex, akkor a $g(x, y) = |f(x) + |y - f(x)|$ függvény is konvex.

7. Keressük meg az összes c komplex számot a következő tulajdonsággal:
Ha I az $n \times n$-es egységmátrix, $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$ és $Q_c = I - c \cdot uu^*$, akkor valamilyen $n > 1$ egész számra $Q_c^n = Q_c$.

8. Egy R gyűrűben van legalább egy nullosztó, de a (jobb és bal-) nullosztók száma véges. Igazoljuk, hogy R véges.

9. Legyen $x_0 > 0$ és $x_{n+1} = x_n^2/(e_n^x - 1)$. Igazoljuk, hogy

$$\lim \frac{n(2 - nx_n)}{\ln n} = \frac{4}{3}.$$

10. Legyen $(a_n), (b_n)$ valós számsorozat, amire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$. Mutassuk meg, hogy majdnem minden x-re

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos(nx + b_n)| = \infty.$$